Analyse élémentaire — 2025-2026

Contrôle continu n$^{\text{o}}$ 2
15 décembre 2025 — 9:30-11:30

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone, ...) n'est autorisé.
Il faut **marquer votre groupe** sur la copie dans le coin en haut à droite.

Exercice 1. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier soigneusement vos réponses (en invoquant un résultat du cours, avec un argument ou un contre exemple).

1) Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale et 1 et 4 sont deux de ses racines, alors il existe $a \in]1, 4[$ tel que $\varphi'(a) = 0$.

2) On peut affirmer sans faire de calcul que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

3) Si $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable telle que $f'(0) = 0$, alors 0 est un point de minimum ou maximum local de f.

Solution.

1) Oui, l'existence de a est assurée par le théorème de Rolle.

2) Oui, car la fonction $x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ sur $[0, r]$ est une paramètre le quart du cercle de rayon r centré à l'origine situé dans le premier quadrant.

3) Non. La fonction $x \mapsto x^3$ est une contre exemple : 0 est un zéro de la dérivée mais pas un point d'extrémum local.

Exercice 2. En calculant les intégrales, établir les identités suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+2}\,dt = 1 + 2\ln\frac{2}{3}$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 4\cos^3 x)\sin x\,dx = 2$ (en utilisant le changement de variable $y = \cos x$)

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$

Solution.

1)
$$\int_0^1 \frac{t}{t+2}\,dt = \int_0^1 \frac{t+2-2}{t+2}\,dt = \int_0^1 dt - 2\int_0^1 \frac{1}{t+2}\,dt = 1 - 2\left[\ln(t+2)\right]_0^1 = 1 + 2\ln\frac{2}{3}$$

2)
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 4\cos^3 x)\sin x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 4\cos^3 x)(-\cos x)'\,dx \\ &= -\int_1^0 (1 + 4y^3)\,dy = \int_0^1 (1 + 4y^3)\,dy \\ &= \left[y + y^4\right]_0^1 = 2\end{aligned}$$

3)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\sin x)'\,dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Exercice 3.

1) En utilisant la définition de la dérivée, calculer les limites

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{11}-1}{x-1} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2}.$$

2) Calculer la dérivée de la fonction $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ en précisant son domaine de dérivabilité.

Solution.

1) On a

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{11}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{11}-1^{11}}{x-1} = (x^{11})'|_{x=1} = 11$$

et

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)-\sin(2\pi)}{x-2} = (\sin(\pi x))'|_{x=2} = \pi\cos(\pi x)|_{x=2} = \pi.$$

2) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. Comme elle est obtenue à partir de fonctions élémentaires par des opérations algébriques et compositions, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ (le plus grand ouvert contenu dans son domaine de définition). On a

$$h'(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Exercice 4. Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$.

1) Donner le domaine maximal de définition $D_f \subset \mathbb{R}$ de f. Calculer f' et préciser le domaine de dérivabilité de f.

2) Dresser le tableau de variations de f. Préciser sur le tableau de variations l'existence éventuelle des asymptotes verticales.

3) Esquisser le graphe de f en indiquant les points où la tangente au graphe est horizontale.

4) Justifier que la fonction $g :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ est bijective.

5) Donner l'équation de la tangente en 0 au graphe de g et déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1} ?

6) Donner l'équation de la tangente en -1 au graphe de g et calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$.

Solution.

1) Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. En tant que fonction rationnelle, f est $\mathcal{C}^\infty$ (à vrai dire elle est analytique) sur son domaine de définition. On a

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}.$$

En particulier, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x-3$.

2) On a

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

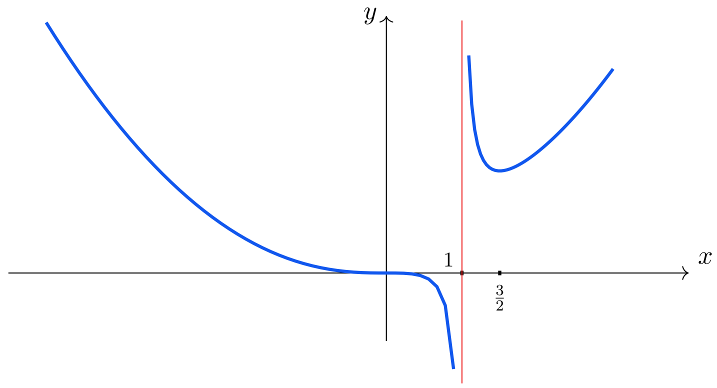
car

$$f\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{\frac{3^3}{2^3}}{\frac{3}{2}-1} = \frac{27}{4}$$

et

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$

3)



4) La fonction g est la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 1[$. La bijectivité de g découle de l'inspection du tableau de variation, ou de la représentation graphique de f.

5) La tangente en 0 est $y = 0$. En particulier, g^{-1} n'est pas dérivable en 0. Son domaine de dérivabilité est $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$ — l'ensemble des $g(x)$ où $x \in\,]-\infty, 1[$ et $g'(x) \neq 0$.

6) La tangente en -1 est décrite par l'équation

$$y = g(-1) + g'(-1)(x+1) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\,(x+1)$$

c'est-à-dire

$$y = -\frac{5}{4}\,x - \frac{7}{4}.$$

Comme $g(-1) = -\frac{1}{2}$, il s'ensuit que

$$(g^{-1})'\Big(-\frac{1}{2}\Big) = -\frac{4}{5}.$$

Barème indicatif : 3 — 6 — 3.5 — 7.5