Analyse élémentaire – 2024-2025

Contrôl continu n° 2 – 16 décembre 2024

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone, ...) n'est autorisé.

Exercice 1. Dire si les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leurs dérivées le cas échéant.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$
2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sin(e^x)$
3) $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(2x + \sqrt{x})$

Solution.
Les trois fonctions sont obtenues par des opérations algébriques et des compositions à partir de fonctions élémentaires. Il s'ensuit qu'elles sont dérivables (à vrai dire, $\mathcal{C}^\infty$).

On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(2+\cos x)'}{(2+\cos x)^2} = \frac{-2+\sin x}{(2+\cos x)^2}, \\ g'(x) &= -\cos(e^x)\,(e^x)' = e^x\,\cos(e^x) \end{aligned}$$

et

$$h'(x) = \frac{(2x+\sqrt{x})')}{2x+\sqrt{x}} = \frac{2+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{4\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}\frac{4\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+1}.$$

Exercice 2. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{e^x - e^3}{x-3}$.

Solution.
On a

$$\lim_{x\to 3} \frac{e^x - e^3}{x-3} = (e^x)'|_{x=3} = e^x|_{x=3} = e^3.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 3x$.

1) Écrire l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 2$.
2) Montrer que f est bijective.
3) Rappeler la formule de la dérivée pour une fonction réciproque f^{-1}.
4) Utiliser la formule précédente pour calculer $(f^{-1})'(4)$.

Solution.
On a $f'(x) = 3(x^2+1)$.

1) L'équation de la tangente est

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) = 14 + 15(x-2) = 15x + 16.$$

2) Comme $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante et donc injective. De plus $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, donc f est aussi surjective, d'où sa bijectivité.

3) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

4) La valeur 4 correspond à $x = 1$, c'est-à-dire $f(1) = 4$. Par la formule précédente,

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 4.

1) Calculer $\arcsin(\frac{-1}{2})$ et $\arctan(-1)$.
2) Calculer $\arcsin(\sin\frac{5\pi}{4})$.

Solution.
On a
$$\arcsin(\frac{-1}{2}) = -\arcsin(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}, \qquad \arctan(-1) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$
et
$$\arcsin\Big(\sin\frac{5\pi}{4}\Big) = \arcsin\Big(\sin\Big(\pi + \frac{\pi}{4}\Big)\Big) = \arcsin\Big(\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big) = -\frac{\pi}{4}.$$
(Il faut faire attention au domaine de définition et l'ensemble des valeurs des fonctions trigonométriques réciproques.)

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes par calcul direct, intégration par parties, ou changement de variables, à votre choix.

$$\text{(i)} \int_0^\pi \cos\Big(2x + \frac{\pi}{4}\Big)\,dx \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{s}{s^2+1}\,ds \qquad \text{(iii)} \int_0^\pi (t+1)\cos(2t)\,dt \qquad \text{(iv)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$$

Solution.
Pour la première intégrale on a
$$\int_0^\pi \cos\Big(2x + \frac{\pi}{4}\Big)\,dx = \int_0^\pi \Big(\frac{1}{2}\sin\Big(2x + \frac{\pi}{4}\Big)\Big)'\,dx = \frac{1}{2}\Big[\sin\Big(2x + \frac{\pi}{4}\Big)\Big]_0^\pi = 0.$$
Pour la deuxième intégrale on fait un changement de variables :
$$\int_0^1 \frac{s}{s^2+1}\,ds = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(s^2)'}{s^2+1}\,ds = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt = \frac{1}{2}\Big[\ln(t+1)\Big]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}.$$
Pour la troisième, on a
$$\begin{aligned}\int_0^\pi (t+1)\cos(2t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (t+1)(\sin(2t))'\,dt \\ &= \frac{1}{2}\Big(\Big[(t+1)\sin(2t)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(2t)\,dt\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(-\int_0^\pi \sin(2t)\,dt\Big) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big[\cos(2t)\Big]_0^\pi \\ &= 0.\end{aligned}$$
Pour finir,
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos^3 x}\,dx = -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{y^3}\,dy = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{y^3}\,dy = -\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{y^2}\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = -\frac{1}{2}(1-2) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) > \cos x + 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $f(x) > x$.

Solution.
Soit $x > 0$. On suppose que $f(x) \leq x$. D'après le théorème des accroissements finis sur $[0, x]$, il existe $\xi \in]0, x[$ tel que
$$x \geq f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0) > (\cos\xi + 2)x \geq x.$$
Cette contradiction entraine que $f(x) > x$.