

Analyse élémentaire – 2025-2026

CONTRÔLE CONTINU N° 1
 20 OCTOBRE, 2025 — 10:00-11:30

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone, ...) n'est autorisé.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes.

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{4x^3 + x - 1}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x + 4x + 2}{x^2 + x + 1}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

Solution.

Dans l'ordre

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 2}{4x^3 + x - 1} = \frac{x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^3 \left(4 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}}{4 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4},$$

$$\frac{x \ln x + 4x + 2}{x^2 + x + 1} = \frac{x \ln x \left(1 + \frac{4}{\ln x} + \frac{2}{x \ln x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1 + \frac{4}{\ln x} + \frac{2}{x \ln x}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \cdot 1 = 0,$$

$$\frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} = \sqrt{x} + 2 \xrightarrow{x \rightarrow 4} 4$$

et

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x - 1)(x^2 + x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{0}{-1} = 0.$$

Exercice 2. Répondre aux questions suivantes (en justifiant ou en donnant un contre-exemple si nécessaire).

- 1) Est-ce que 5 est un majorant de l'ensemble $\{2 \sin x - 3 \cos(2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$?
- 2) Déterminer le plus grand sous-ensemble réel sur lequel l'expression $\arcsin(x + 1)$ est définie.
- 3) Donner la définition d'une fonction surjective.
- 4) La fonction $f : [-2, +\infty[\rightarrow [3, +\infty[$ définie par $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$ est-elle surjective ?

Solution.

- 1) Oui, car

$$2 \sin x - 3 \cos(2x) \leq |2 \sin x - 3 \cos(2x)| \leq |2 \sin x| + |3 \cos(2x)| = 2|\sin x| + 3|\cos(2x)| \leq 5.$$

2) Le domaine de définition de arcsin est $[-1, 1]$. Donc

$$-1 \leq x + 1 \leq 1$$

c'est-à-dire, en ajoutant -1 aux deux inégalités,

$$-2 \leq x \leq 0.$$

Donc la réponse est $[-2, 0]$.

3) Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est surjective si pour tout $y \in Y$, il existe au moins un antécédent de y .

4) La réponse est non, car la fonction f admet son minimum global en $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 3} = -1$. La valeur minimale est

$$f(x_0) = f(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) + 7 = 4.$$

Donc 3 n'a pas d'antécédent.

Remarque. Pour ce dernier point, on aurait pu considérer l'équation

$$3x^2 + 6x + 7 = f(x) = 3$$

(c'est-à-dire on cherche les antécédents de 3). Comme l'équation est

$$3x^2 + 6x + 4 = 0$$

et $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 < 0$, on en déduit que 3 n'a pas d'antécédent.

Exercice 3. Soit f une fonction réelle définie par l'expression $f(x) = \frac{x^2 - 2}{2x + 1}$.

1) Déterminer $D_f \subset \mathbb{R}$, le domaine maximal de définition de f .

2) Pour $y_0 \in \mathbb{R}$ fixé, trouver tous les x tels que $f(x) = y_0$.

3) Comment restreindre l'ensemble de départ de f pour que la fonction devienne bijective (c'est-à-dire trouver $I \subset D_f$ tel que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ soit bijective) ?

4) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

On rappelle que la droite définie par $y = ax + b$ (si elle existe) est une droite asymptote (oblique) en $-\infty$.

Solution.

1) La condition d'existence pour l'expression qui définit f est $2x + 1 \neq 0$. Donc

$$D_f = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

2) On la suite d'équations équivalentes

$$\frac{x^2 - 2}{2x + 1} = y_0,$$

$$x^2 - 2 = 2y_0 x + y_0,$$

et finalement

$$x^2 - 2y_0 x - (y_0 + 2) = 0.$$

Comme $\Delta_0 = 4y_0^2 + 4(y_0 + 2)$, on obtient les racines sont

$$x_{0,1} = y_0 - \sqrt{y_0^2 + y_0 + 2} \quad \text{and} \quad x_{0,2} = y_0 + \sqrt{y_0^2 + y_0 + 2}$$

On note que la solution $x_{0,1} = y_0 - \sqrt{y_0^2 + y_0 + 2}$ est toujours strictement négative.

3) On peut prendre $f :]-\infty, -\frac{1}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$. Pour voir que le domaine de définition est correcte, il suffit de montrer que pour $y \in \mathbb{R}$ la solution vérifie

$$x(y) = y - \sqrt{y^2 + y + 2} < -\frac{1}{2}.$$

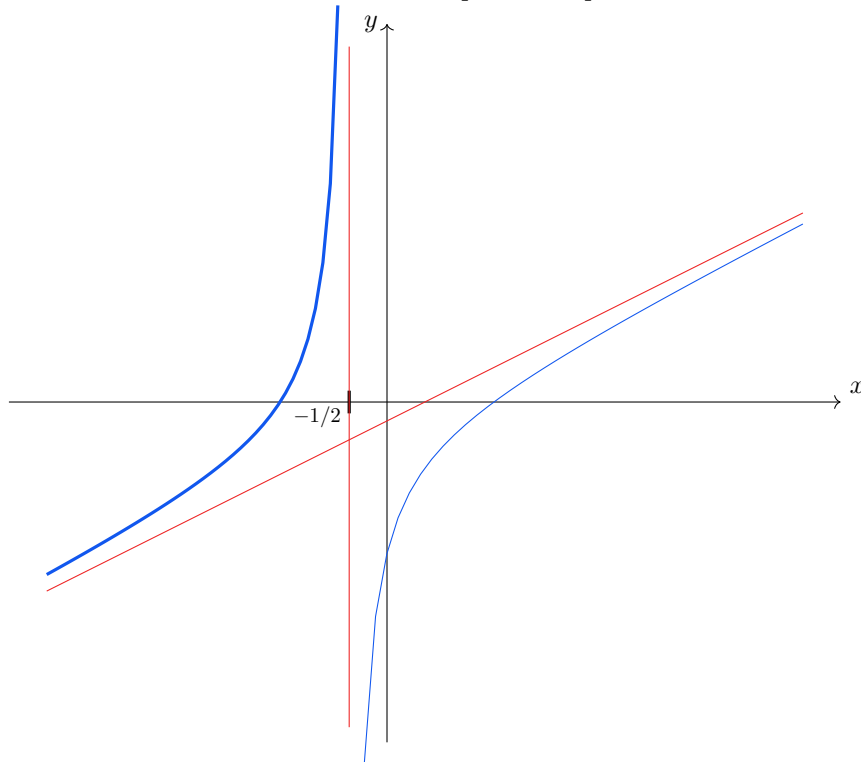
Donc on veut montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$y + \frac{1}{2} < \sqrt{y^2 + y + 2}.$$

Maintenant, si $y < -\frac{1}{2}$ l'inégalité est évidente, et si $y \geq -\frac{1}{2}$, on considère le carré et on voit que

$$y^2 + y + \frac{1}{4} < y^2 + y + 2.$$

Remarque. L'inégalité $x(y) < -\frac{1}{2}$ assure que la fonction réciproque existe. Graphiquement, G_f (f vue comme fonction sur son domaine maximal) a deux composantes, dont celle de gauche qui représente une fonction strictement monotone sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$.



4) On calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2}{x(2x + 1)} = \frac{1}{2} =: a$$

et, par la suite,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2}{2x + 1} - \frac{1}{2}x \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 4 - 2x^2 - x}{2x + 1} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 4}{2x + 1} = -\frac{1}{4} =: b. \end{aligned}$$

Comme on a pu calculer les réels a et b , on en déduit que le graphe de f admet la droite $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ comme asymptote oblique en $-\infty$. (Voir la représentation graphique ci-dessus.)

Barème indicatif : 7 — 7 — 6