# Analyse élémentaire – 2024-2025

## Contrôl continu n° 1 – 21 octobre 2024

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone, ...) n'est autorisé.

---

**Exercice 1.** On considère les expressions $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ et $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}}$. Pour quels $x \in \mathbb{R}$ ces expressions sont-elles définies ?

***Solution.***
Pour la première, les conditions d'existence sont $\sqrt{x} > 0$ pour le logarithme et $x \geq 0$ pour la racine. On en déduit que la première expression est définie pour $x > 0$.

Pour la deuxième les conditions d'existence sont

$$\frac{x-1}{x^2-4x+3} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad x^2-4x+3 \neq 0.$$

Comme

$$\frac{x-1}{x^2-4x+3} = \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{x-3},$$

il s'ensuit que l'expression est définie pour $x > 3$.

**Exercice 2.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2 - 2ax + 5 - a^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $a$ pour que $f$ soit croissante.

***Solution.***
Pour que $f$ soit croissante, il faut que le le minimum de $f$ soit en un $x$ valant au plus 1. Comme le minimum est en $x = a$, la condition cherchée est donc $a \leq 1$.

**Exercice 3.**

1) Calculer, si elle existe, la limite de $\dfrac{x^3+2x^2+2x-5}{x-1}$ en $+\infty$ et en 1.
2) Calculer, si elle existe, la limite de $\sqrt{x} - \sqrt{x+\sqrt{x}}$ en $+\infty$.
3) Montrer que $2\cos(x) - 3\sin(x)$ est compris entre $-5$ et 5. En déduire, si elle existe, la limite en $+\infty$ de $\dfrac{2\cos(x)-3\sin(x)}{\ln x}$.
4) Calculer la limite de $\dfrac{e^x}{e^x + \ln x}$ en $+\infty$ et en $0^+$, c'est-à-dire la limite à droite en 0.

***Solution.***

1) On a

$$\frac{x^3+2x^2+2x-5}{x-1} = \frac{x^3(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3})}{x(1-\frac{1}{x})} = x^2\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

et

$$\frac{x^3+2x^2+2x-5}{x-1} = \frac{(x^2+3x+5)(x-1)}{x-1} = x^2+3x+5 \xrightarrow[x\to 1]{} 9.$$

2) En utilisant l'expression conjuguée, on a

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+\sqrt{x}} = \frac{x-(x+\sqrt{x})}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = -\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{1}{2}.$$

3) L'expression $2\cos(x) - 3\sin(x)$ est comprise entre $-5$ et $5$ car cos et sin sont compris entre $-1$ et $1$. Donc, pour $x > 1$,

$$-\frac{5}{\ln x} \leq \frac{2\cos(x) - 3\sin(x)}{lnx} \leq \frac{5}{\ln x}.$$

On en déduit par le théorème d'encadrement que la limite est 0 en $+\infty$.

4) En utilisant les croissances comparées, on a

$$\frac{e^x}{e^x + \ln x} = \frac{e^x}{e^x(1 + \frac{\ln x}{e^x})} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, on en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{e^x + \ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

**Exercice 4.**

1) Soit $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$ et $f : E \to F$ défini par $f(1) = 3$, $f(2) = f(3) = 2$. L'application $f$ est elle injective ? Surjective ? Bijective ?

2) Lister toutes les applications injectives $f : E \to F$ telles que $f(2) = 4$.

***Solution.***

1) L'application $f$ n'est ni injective ($f(2) = f(3)$), ni surjective ($f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$), ni bijective.

2) Il y a 6 applications injectives $f : E \to F$ telles que $f(2) = 4$. Pour le voir, on regarde les possibilités pour les images de 1 et 3. L'image de 1 est 1, 2 ou 3 et celle de 3 est différente de $f(1)$ et vaut 1, 2 ou 3 également.

Explicitement, les possibilités pour le couple $(f(1), f(3))$ sont

$$(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1) \text{ et } (3, 2).$$

**Exercice 5.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective décroissante. Montrer que sa fonction réciproque $f^{-1}$ est décroissante.

***Solution.***
Soient $y_1 < y_2$ dans le domaine d'arrivé de $f$. Soit $x_1$ tel que $f(x_1) = y_1$ et soit $x_2$ tel que $f(x_2) = y_2$. Puisque $f$ est décroissante, on a que $x_1 > x_2$ pour avoir $f(x_1) < f(x_2)$. Donc

$$f^{-1}(y_1) = x_1 > x_2 = f^{-1}(y_2),$$

c'est-à-dire $f^{-1}$ est décroissante