

Analyse approfondie



Sommaire

1	Le corps ordonné $\mathbb{R}$, sup et inf	1
1.1	Définition des nombres réels. Nombres réels et nombres rationnels	1
1.2	Tout sous-ensemble majoré admet une borne sup, le plus petit majorant	2
2	Quelques éléments de topologie	2
2.1	Voisinages, ouverts et fermés de $\mathbb{R}$	2
2.2	Points d'accumulation et limites	3
3	Limites	4
3.1	Autour des limites (suites et fonctions)	4
3.2	Téorème de Bolzano-Weierstrass	5
4	Fonctions continues	6
4.1	Continuité et théorème des valeurs intermédiaires	6
4.2	Continuité de l'application réciproque	6
4.3	Continuité uniforme	7
5	Fonctions intégrables	7
5.1	Intégrale de Riemann	7
5.2	Propriétés	11
6	Intégrabilité des fonctions continues	12

1. Le corps ordonné $\mathbb{R}$, sup et inf

Définition. Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si pour tous $a < b \in S$ et pour tout $c \in \mathbb{R}$ tel que $a < c < b$ on a $c \in S$.

Par la suite I et D seront des sous-ensembles de $\mathbb{R}$: I sera un intervalle et D , assez souvent, une réunion d'intervalles.

Définition. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation pour D . On dit que f admet la limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in D \quad \text{et} \quad 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \quad \text{on a} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

1.1. Définition des nombres réels. Nombres réels et nombres rationnels

On a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ avec la construction de $\mathbb{R}$ basée sur l'écriture décimale. Pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$,

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\dots = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots$$

avec

- $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ donné par $p = \alpha_0 q + r_0$, $0 \leq r_0 < q$
- $\alpha_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ donné par $10r_0 = \alpha_1 q + r_1$, $0 \leq r_1 < q$
- $\alpha_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ donné par $10r_1 = \alpha_2 q + r_2$, $0 \leq r_2 < q$
- ...

On en déduit la périodicité de l'écriture décimale des nombres rationnels. Réciproquement il faut utiliser la somme infinie d'une série géométrique de raison $r \in]0, 1[$.

Remarque 1.1. L'écriture périodique avec des décimales toutes nulles est équivalente à celle ayant seulement des 9 (à partir d'un certain rang). **C'est le seul cas d'écriture non unique.**

Exercice 1.1. Donner l'écriture décimale de $\frac{1}{13}$.

1.2. Tout sous-ensemble majoré admet une borne sup, le plus petit majorant

Définition. Le sous-ensemble non-vidé $A \subset \mathbb{R}$ est dit *borné supérieurement* (ou majoré) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a $x \leq M$. Le réel M est dit *majorant* de A .

Lemme-Définition 1.2. Si $A \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble non-vidé et majoré, alors $\sup A$, le plus petit majorant de A existe et est appelé la borne sup de A .

Démonstration. On considère l'écriture décimale **unique** (proprement infinie) pour chaque élément de A . On pose successivement

$$\mu_0 = \max \{ \alpha_0 \mid a = \alpha_0.\alpha_1\dots \in A \} \quad \text{et} \quad S_0 = \{ a \mid a = \mu_0.\alpha_1\dots \in A \} \subset A,$$

(justifier l'existence de μ_0) puis

$$\mu_1 = \max \{ \alpha_1 \mid a = \mu_0.\alpha_1\dots \in S_0 \} \quad \text{et} \quad S_1 = \{ a \mid a = \mu_0.\mu_1\alpha_2\dots \in S_0 \} \subset S_0$$

et ainsi de suite. On montre que

$$\sup A = \mu := \mu_0.\mu_1\mu_2\dots$$

c'est-à-dire que μ est un majorant de A et que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A \quad \text{tel que} \quad -\varepsilon + \mu < a_\varepsilon \leq \mu.$$

□

Exercice 1.2. Avec les éléments de la preuve précédente, donner une suite croissante $(x_n)_n$ telle que $x_n \in S_n$ pour tout n . Est-elle convergente et si oui, quelle est la limite ?

Exercice 1.3. Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que $\sup A = 1$ et $1 \notin A$.

- 1) Montrer qu'il existe a_1, a_2 et a_3 des éléments de A , deux à deux différents, tels que $\sum_1^3 a_k \geq 2$.
- 2) Montrer qu'il existe $(a_k)_1^4$ des éléments de A , deux à deux différents, tels que $\sum_1^4 a_k \geq 3$.
- 3*) Quelle est l'affirmation pour un entier n quelconque? Démontrer cette affirmation.

Exercice 1.4. Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que $\inf A = m$, $\sup A = M$ et $m, M \notin A$ et $m \neq M$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < M - m$, il existe $a'_\varepsilon, a''_\varepsilon \in A$ tels que

$$a''_\varepsilon - a'_\varepsilon > (M - m) - \varepsilon.$$

2. Quelques éléments de topologie

2.1. Voisinages, ouverts et fermés de $\mathbb{R}$

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}$. Un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est dit voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $] -\varepsilon + a, a + \varepsilon[\subset V$.

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble de tous les voisinages de a . On a les propriétés suivantes :

1. si $V \in \mathcal{V}(a)$ alors $a \in V$
2. si $V \in \mathcal{V}(a)$ et si $V \subset W$, alors $W \in \mathcal{V}(a)$
3. si $V, W \in \mathcal{V}(a)$ alors $V \cap W \in \mathcal{V}(a)$
4. $\mathbb{R} \in \mathcal{V}(a)$
5. si $V \in \mathcal{V}(a)$ alors il existe $W \subset V$ tel que $W \in \mathcal{V}(a)$ et pour tout $x \in W$ on a $V \in \mathcal{V}(x)$.

Remarque 2.1. Un ensemble X muni d'un ensemble de voisinages pour chacun de ces points vérifiant les propriétés 1–5) est un *espace topologique*. On dit que le système des voisinages définit une *topologie* sur X .

La topologie définie sur $\mathbb{R}$ par les voisinages contenant des intervalles ouverts symétriques centrés en chaque $a \in \mathbb{R}$ est appelée *topologie usuelle*.

Définition. Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$ est dit *ouvert* (pour la topologie usuelle) si pour tout $x \in \Omega$ on a $\Omega \in \mathcal{V}(x)$.

Exercice 2.1. Montrer qu'un intervalle ouvert est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Ayant $\mathbb{R}$ avec la topologie usuelle, on définit une topologie sur $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en introduisant les voisinages naturels pour $\pm\infty$.

Ainsi, si $D \subset \mathbb{R}$ est le domaine de définition d'une fonction, on pourra parler de $+\infty$ comme point d'accumulation de D . Par exemple pour $D = \mathbb{N}$, $]5, +\infty[, \dots$

2.2. Points d'accumulation et limites

Définition. Soit $S \subset \mathbb{R}$. Un point $a \in \mathbb{R}$ est dit *point d'accumulation* de S si

$$\text{pour tout } V \in \mathcal{V}(a) \text{ on a } (V \setminus \{a\}) \cap S \neq \emptyset.$$

La définition fonctionne pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On pourrait introduire la notion et notation de voisinage épointé: si $V \in \mathcal{V}(a)$, alors $V_a := V \setminus \{a\}$. La définition du point d'accumulation devient

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \text{ on a } V_a \cap S \neq \emptyset.$$

Lemme 2.2. a est un point d'accumulation pour S si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_n$ dans S telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Versions de la définition de la limite d'une fonction; on arrive à une forme suffisamment générale pour couvrir tous les cas de limites de fonctions réelles et la limite d'une suite.

- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation pour D . On dit que f admet la limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que } \forall x \in D \quad \text{et } 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \quad \text{on a } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation pour D . On dit que f admet la limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si

$$\forall W \in \mathcal{V}(\ell) \quad \exists V_W \in \mathcal{V}(a) \quad \text{tel que } f(V_{W,a} \cap D) \subset W.$$

•

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point d'accumulation pour D . On dit que f admet la limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a si

$$\forall W \in \mathcal{V}(\ell) \quad \exists V_W \in \mathcal{V}(a) \quad \text{tel que } f(V_{W,a} \cap D) \subset W.$$

Interprétation de la définition pour les suites: La suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que } \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et } n \geq N(\varepsilon) \quad \text{on a } |x_n - \ell| < \varepsilon.$$

Exercice 2.2. En interprétant la notion de voisinage et de point d'accumulation, donner des définitions explicites (en ε et $\delta(\varepsilon)$) de

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell$$

quand p est un point fini ou infini et ℓ est un point fini ou infini.

3. Limites

3.1. Autour des limites (suites et fonctions)

Proposition 3.1. Si $f_j(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 1, 2$, alors $f_1(x) f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 \ell_2$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |f_1(x)f_2(x) - \ell_1\ell_2| &\leq |f_1(x) - \ell_1||f_2(x)| + |\ell_1||f_2(x) - \ell_2| < \varepsilon(|\ell_2| + 1) + |\ell_1|\varepsilon \\ &= (|\ell_1| + |\ell_2| + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

dès que x vérifie $|x - a| < \delta_1(\varepsilon)$ et $|x - a| < \delta_2(\varepsilon)$. On prend donc

$$\delta(\varepsilon) = \min \left(\delta_1 \left(\frac{\varepsilon}{|\ell_1| + |\ell_2| + 1} \right), \delta_2 \left(\frac{\varepsilon}{|\ell_1| + |\ell_2| + 1} \right) \right).$$

□

Théorème 3.2 (d'encadrement). Soient $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point d'accumulation. Si

- 1) pour tout $x \in D$, $x \neq a$ on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
 - 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$
- alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

Démonstration. Quand a est réel, on a

$$-\varepsilon + \ell < f(x) \leq g(x) < h(x) < \ell + \varepsilon$$

dès que $|x - a| < \delta_f(\varepsilon)$ et $|x - a| < \delta_h(\varepsilon)$.

□

Remarque. La preuve utilisant les voisinages est plus simple dans ce cas.

Exercice 3.1. Écrire l'énoncé et la preuve quand $\ell = +\infty$.

Proposition 3.3. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Si f est croissante et majorée, alors

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup f =: \bar{f}.$$

Démonstration. Une preuve peut être développée en suivant ces étapes.

1. Justifier qu'il suffit de considérer qu'il existe $\eta > 0$ tel que f est strictement croissante sur $] -\eta + b, b[$ (c'est-à-dire f est strictement monotone sur un intervalle ouvert qui finit en b).
2. Soit $\eta > \varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $y_\varepsilon \in \text{im}(f)$ tel que $-\varepsilon + \bar{f} < y_\varepsilon < \bar{f}$.
3. Soit x_ε tel que $f(x_\varepsilon) = y_\varepsilon$. Justifier que x_ε est unique. Si un dessin n'est pas déjà fait, il faudrait le faire.
4. Prendre $\delta(\varepsilon) = b - x_\varepsilon$ et conclure.

□

3.2. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 3.4 (Bolzano-Weierstrass). De toute suite (réelle) bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $a < b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a \leq x_n \leq b.$$

On note $I_0 = [a, b] = [a_0, b_0]$ et on prend $k_0 = 0$ (le plus petit indice tel que $x_n \in I_0$).

Au moins un des deux sous-intervalles, $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ et $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$ contient une infinité de termes de la suite $(x_n)_n$. On pose $I_1 = [a_1, b_1]$ cet intervalle et on prend

$$k_1 = \min \{n \mid n > k_0, x_n \in I_1\}.$$

On répète cette opération pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient

- la suite des intervalles emboîtés $(I_n)_n$
- la sous-suite $(x_{k_n})_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_{k_n} \in I_n$.

Alors, par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq x_{k_n} \leq b_n, \quad (a_n)_n \nearrow, \quad (b_n)_n \searrow \quad \text{et} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

On en déduit que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergente, vers la même limite, et donc que la sous-suite est convergente (vers cette limite commune). $\square$

Exercice 3.2. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et soit $(U_j)_{j \in J}$ une famille infinie d'intervalles ouverts telle que

$$[a, b] \subset \bigcup_{j \in J} U_j.$$

Montrer qu'il existe un sous-ensemble fini $F \subset J$ tel que

$$[a, b] \subset \bigcup_{j \in F} U_j.$$

4. Fonctions continues

4.1. Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 4.1. Démontrer que l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert.

Théorème 4.1 (des valeurs intermédiaires). *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $a < b \in I$, alors pour tout λ entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c = c_\lambda \in]a, b[$ tel que $f(c) = \lambda$.*

Démonstration. On considère $f(a) < f(b)$. Soit

$$S_\lambda = \{x \mid x \in [a, b], f(x) < \lambda\}.$$

Comme $a \in S_\lambda$ et b est un majorant de S_λ , on prend $c_\lambda = \sup S_\lambda$. $\square$

Le théorème dit que pour tous $a < b \in I$, l'image $f([a, b])$ contient l'intervalle fermé et borné défini par $f(a)$ et $f(b)$. On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 4.2. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Démonstration. Par l'absurde. $\square$

Théorème 4.3. Une fonction continue définie sur un intervalle fermé et borné atteint ses bornes.

Démonstration. On montre que f est bornée (supérieurement) en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass. On applique la définition du $\sup f$ pour construire une suite et on finit en appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass. $\square$

Exemple 4.4. Ce théorème dit que l'image d'un intervalle fermé et borné par une fonction continue est un intervalle fermé et borné. Les deux hypothèses sur l'intervalle doivent être satisfaites.

- $x \mapsto x^2$ et $I =]-2, 2]$
- $x \mapsto \tan x$ et $I = [0, \frac{\pi}{2}[$

4.2. Continuité de l'application réciproque

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction continue, avec $I, J \subset \mathbb{R}$ des intervalles. Si on suppose que f est bijective, on veut étudier la continuité de l'application réciproque. On a

Théorème 4.5. Si $f : I \rightarrow J$ est bijective et continue, alors f^{-1} est continue.

Démonstration. Comme f est injective et continue, on en déduit que f est strictement croissante (monotone et on fait un choix) et, par conséquent, que f^{-1} est strictement croissante.

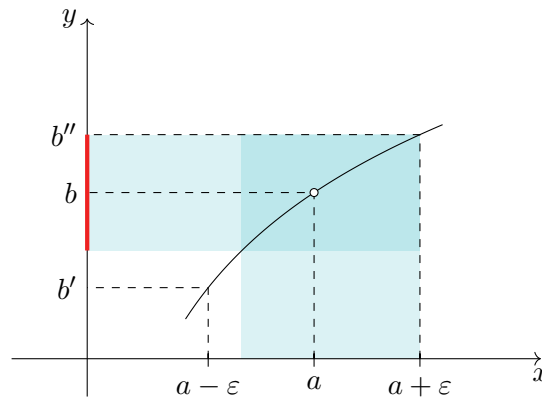


Figure 1: L'argument de la continuité en b pour l'affirmation si f est continue et strictement croissante alors f^{-1} est continue.

Soit $b \in J$ et soit $a = f^{-1}(b)$, c'est-à-dire $f(a) = b$. On veut démontrer que f^{-1} est continue en b . Soit $\varepsilon > 0$. L'image de $[-\varepsilon + a, a + \varepsilon]$ est un intervalle $[b', b'']$ qui contient b . On prend

$$\delta(\varepsilon) = \min(b'' - b, b - b').$$

$\square$

4.3. Continuité uniforme

Théorème 4.6. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est uniformément continue.

Démonstration. Par l'absurde avec le théorème de Bolzano-Weierstrass. $\square$

5. Fonctions intégrables

5.1. Intégrale de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle *subdivision* de $[a, b]$ une suite finie de points ordonnés deux à deux disjoints, $\sigma = (x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b)$. Le maximum

$$\|\sigma\| = \max_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})$$

est appelé la norme de σ . Une suite finie de n points $\{\xi_j\}_j$ telle que pour tout j , $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ est appelée *suite de points intermédiaires* associée à la subdivision σ .

Définition. La somme de Riemann associée à f , σ et $\{\xi_j\}_j$ est la somme finie

$$S(f, \sigma, \{\xi_j\}) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) (x_j - x_{j-1}).$$

Définition. La fonction f est dite *intégrable* (dans le sens de Riemann) sur $[a, b]$ si

$$\lim_{\|\sigma\| \rightarrow 0} S(f, \sigma, \{\xi_j\}) =: \int_a^b f(x) dx$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall \sigma, \forall \{\xi_j\} \quad \text{et} \quad \|\sigma\| < \rho(\varepsilon) \quad \text{on a} \quad |S(f, \sigma, \{\xi_j\}) - I| < \varepsilon. \quad (*)$$

La limite, notée $\int_a^b f(x) dx$ s'appelle l'intégrale (de Riemann) de f sur $[a, b]$.

Proposition 5.1. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors f est bornée.

Démonstration. On suppose que f n'est pas majorée. Alors pour tout entier $n > 0$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$. En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut supposer que la suite $(x_n)_n$ converge vers $x^* \in [a, b]$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geq N(\varepsilon) \quad \text{on a} \quad |x_n - x^*| < \varepsilon.$$

Soit $I \in \mathbb{R}$. On prend $\varepsilon = 1$. On veut démontrer que

$$\forall \rho > 0 \quad \exists \sigma_\rho, \exists \{\xi_j^\rho\} \quad \text{tels que} \quad \|\sigma_\rho\| < \rho \quad \text{et} \quad S(f, \sigma_\rho, \{\xi_j^\rho\}) > I + 1.$$

Pour $\rho > 0$, on prend $\sigma_\rho = (t_0, t_1, \dots)$ la subdivision régulière de norme $\lfloor (b-a)/\rho \rfloor + 1$ dont on modifie les deux intervalles "autour" de x^* (on rajoute éventuellement des points t_i) telle que x^* soit le milieu d'un intervalle $[t_{k-1}, t_k]$ de longueur ρ . On prend les points intermédiaires $\xi_j = t_j$ sauf pour le point d'indice k , pour lequel on prend $\xi_k = x_n$, avec

$$n \geq \max \left(\frac{|A_\rho| + I + 1}{\rho}, N\left(\frac{\rho}{2}\right) \right).$$

Le $N\left(\frac{\rho}{2}\right)$ apparaît car on veut, dans ce qui suit, que x_n appartienne à l'intervalle $[t_{k-1}, t_k]$, où $x^* = \frac{t_{k-1} + t_k}{2}$. Alors

$$S(f, \sigma_\rho, \{\xi_j^\rho\}) = \sum_{j \neq k, j=1}^N f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) + f(x_n)\rho > A_\rho + n\rho \geq I + 1$$

car $f(x_n) > n \geq \frac{|A_\rho| + I + 1}{\rho}$. □

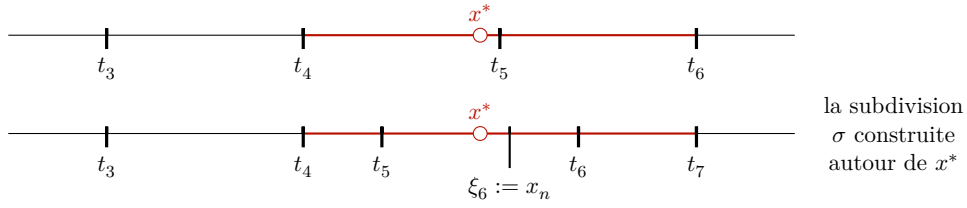


Figure 2: La définition de la subdivision et des points intermédiaires associés; dans la deuxième ligne, le point intermédiaire ξ_6 est donné par un élément de la suite $(x_n)_n$.

Définition. Pour une subdivision σ , la *somme de Darboux supérieure*¹ de f associée à σ , $\bar{S}_\sigma(f)$, est obtenue en prenant dans la somme de Riemann le sup de f sur chaque sous-intervalle $[x_{j-1}, x_j]$. Si

$$\bar{f}_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x),$$

alors

$$\bar{S}_\sigma = \sum_{j=1}^n \bar{f}_j \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Théorème 5.2 (critère d'intégrabilité). *La fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma = \sigma_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad |\bar{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f)| < \varepsilon.$$

Il faut revoir l'exercice 1.3!

Démonstration. On suppose f intégrable et on note I la valeur de l'intégrale. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition, il existe $\rho(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout subdivision σ telle que $\|\sigma\| < \rho(\varepsilon)$ et pour tout ensemble de points intermédiaires $\{\xi_j\}$ on a

$$-\varepsilon + I < \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) < I + \varepsilon.$$

On choisit σ_ε une subdivision de norme $< \varepsilon$. Pour chaque j , en utilisant la caractérisation de $\bar{f}_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$, on choisit un point $\bar{\xi}_j$ (et le choix correspondant $\underline{\xi}_j$ pour $\underline{f}_j$) tel que

$$-\varepsilon + \bar{f}_j < f(\bar{\xi}_j) \leq \bar{f}_j \quad \text{et} \quad \underline{f}_j \leq f(\underline{\xi}_j) < \underline{f}_j + \varepsilon.$$

Alors

$$\bar{S}_{\sigma_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{\sigma_\varepsilon}(f) = \sum_{j=1}^n (\bar{f}_j - \underline{f}_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \underbrace{(\bar{f}_j - \varepsilon)}_{< f(\bar{\xi}_j)} - \underbrace{(\underline{f}_j + \varepsilon)}_{> f(\underline{\xi}_j)} + 2\varepsilon (x_j - x_{j-1})$$

et donc

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\sigma_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{\sigma_\varepsilon}(f) &\leq \sum_{j=1}^n (f(\bar{\xi}_j) - f(\underline{\xi}_j) + 2\varepsilon)(x_j - x_{j-1}) \\ &= S(f, \sigma_\varepsilon, \{\bar{\xi}_j\}) - S(f, \sigma_\varepsilon, \{\underline{\xi}_j\}) + 2\varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

¹ f est bornée d'après la proposition 5.1.

En utilisant l'hypothèse,

$$\begin{aligned}\bar{S}_{\sigma_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{\sigma_\varepsilon}(f) &\leq I + \varepsilon - (I - \varepsilon) + 2\varepsilon(b - a) \\ &= 2(b - a + 1)\varepsilon.\end{aligned}$$

Pour la réciproque, il faut trouver la valeur de l'intégrale, et puis vérifier la définition, c'est-à-dire (*).

PREMIÈRE ÉTAPE. Soit $\varepsilon = \frac{1}{n}$. On utilise l'hypothèse avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et on construit la suite de subdivisions $(\sigma_n)_n$ par récurrence :

- pour $\varepsilon = \frac{1}{1}$, c'est-à-dire $n = 1$, on prend $\sigma_1 = \sigma_{\frac{1}{1}}$
- pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $n = 2$, on prend $\sigma_2 = \sigma_{\frac{1}{2}} \cup \sigma_1$
- pour $\varepsilon = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $n = 3$, on prend $\sigma_3 = \sigma_{\frac{1}{3}} \cup \sigma_2$
- en général, pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on prend $\sigma_n = \sigma_{\frac{1}{n}} \cup \sigma_{n-1}$.

En notant $\bar{S}_n = \bar{S}_{\sigma_n}$, comme

$$\cdots \leq \underline{S}_{n-1} \leq \underline{S}_n \leq \bar{S}_n \leq \bar{S}_{n-1} \leq \cdots$$

on en déduit I comme limite commune des suites $(\underline{S}_n)_n$ et $(\bar{S}_n)_n$ ainsi construites. En particulier

$$-\frac{1}{n} + I < \underline{S}_n \geq I \quad \text{et} \quad I \geq \bar{S}_n < I + \frac{1}{n}.$$

DEUXIÈME ÉTAPE. On utilise les notations précédentes et on suppose que f n'est pas constante. Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on considère la subdivision $\sigma_n = (t_0, t_1, \dots, t_M)$. Pour une subdivision quelconque $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ et une suite de points intermédiaires $\{\xi_j\}$, on a

$$|S(f, \sigma, \{\xi_j\}) - I| \leq |S(f, \sigma, \{\xi_j\}) - \bar{S}_n| + |\bar{S}_n - I| < |S(f, \sigma, \{\xi_j\}) - \bar{S}_n| + \frac{1}{n}.$$

Pour contrôler le premier terme, on veut que $N \geq M$. Il suffit que la condition

$$\|\sigma\| < \mu := \min_{i=1}^M (t_i - t_{i-1}) \tag{c1}$$

soit satisfaite. Alors pour tout $j \geq 1$, ou bien $[x_{j-1}, x_j] \subset [t_{i-1}, t_i]$ pour un certain i , ou bien $[x_{j-1}, x_j]$ contient un t_i dans son intérieur — on note $j(i)$ cet indice j . On a

$$\begin{aligned}|\bar{S}_n - S(f, \sigma, \{\xi_j\})| &= \left| \sum_{i=1}^M \bar{f}_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{j=1}^N f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^M \left[\bar{f}_i(t_i - t_{i-1}) - \left(f(\xi_{j(i-1)})(x_{j(i-1)} - t_{i-1}) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sum_{j=j(i-1)+1}^{j(i)-1} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) + f(\xi_{j(i)})(t_i - x_{j(i)-1}) \right) \right] \right|.\end{aligned}$$

En décomposant les intervalles $[x_{j-1}, x_j]$ qui contiennent des t_i , voir la figure 3, on obtient pour chaque $i = 1, \dots, M$ une majoration de la forme

$$\begin{aligned}&\left| \underbrace{\bar{f}_i(t_i - t_{i-1})}_{\rightsquigarrow \underline{f}_i(t_{i-1})} - \left(\underbrace{f(\xi_{j(i-1)})(x_{j(i-1)} - t_{i-1})}_{\geq \underline{f}_i} + \sum_{j=j(i-1)+1}^{j(i)-1} \underbrace{f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})}_{\geq \underline{f}_i} + \underbrace{f(\xi_{j(i)})(t_i - x_{j(i)-1})}_{\geq \underline{f}_i} \right) \right| \\ &\leq (\bar{f}_i - \underline{f}_i)(t_i - t_{i-1}) + (\bar{f} - \underline{f})(x_{j(i-1)} - t_{i-1}).\end{aligned}$$

le terme $f(\xi_{j(i-1)-1})(x_j(i-1) - x_{j(i-1)-1})$ dans $S(f, \sigma, \{\xi_j\})$ sera décomposé en $f(t_{i-1})(x_j(i-1) - t_{i-1}) + f(\xi_{j(i-1)-1})(t_{i-1} - x_{j(i-1)-1})$

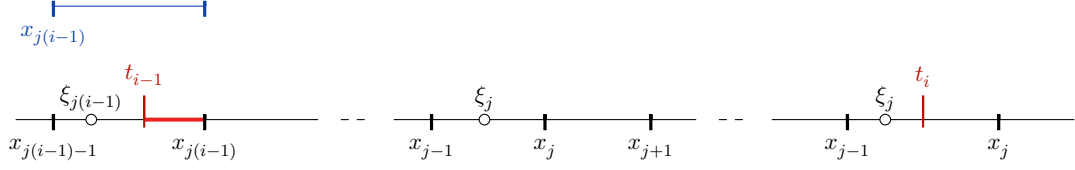


Figure 3: L'indice $j(i)$ est défini par la valeur j pour laquelle $t_i \in [x_{j-1}, x_j]$. Du point de vue du calcul des sommes de Riemann, le point intermédiaire $\xi_{j(i)}$ se trouve, le plus souvent, ou bien dans $[x_{j-1}, t_i]$ ou bien dans $[t_i, x_j]$.

La majoration reflète la situation décrite dans la figure 3.

En considérant la somme sur i , on obtient

$$\begin{aligned} |\bar{S}_n - S(f, \sigma, \{\xi_j\})| &= \left| \sum_{i=1}^M \bar{f}_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{j=1}^N f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^M (\bar{f}_i - \underline{f}_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{M-1} (\bar{f} - \underline{f})\|\sigma\| \\ &< \frac{1}{n} + (M-1)(\bar{f} - \underline{f})\|\sigma\| < \frac{2}{n} \end{aligned}$$

dès que

$$(M-1)(\bar{f} - \underline{f})\|\sigma\| < \frac{1}{n}. \quad (\text{c2})$$

En mettant ensemble (c1) et (c2), on trouve que pour

$$\rho(\sigma) < \min \left(\mu, \frac{1}{(M-1)(\bar{f} - \underline{f})n} \right)$$

on a

$$|S(f, \sigma, \{\xi_j\}) - I| < \frac{3}{n}.$$

□

5.2. Propriétés

Proposition 5.3. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $a < c < b$. On a les propriétés suivantes.

- 1) (linéarité) $\alpha f + \beta g$ est intégrable et $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$
- 2) (aditivité) f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$ et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
- 3) (positivité) si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f \geq 0$

Démonstration. L'aditivité est plus subtile ; il faut justifier pourquoi si f est intégrable sur $[a, b]$, alors elle l'est sur tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$. On a besoin de l'intégrabilité du produit (voir la proposition suivante) et du produit $1_{[c,d]} \cdot f$. □

Proposition 5.4. *Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont intégrables, alors fg est intégrable.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et soient σ_ε et τ_ε les deux subdivisions données par le critère appliqué à f et à g . On note $\Delta = \sigma_\varepsilon \cup \tau_\varepsilon$. Alors

$$\bar{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) \leq \bar{S}_{\sigma_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{\sigma_\varepsilon}(f) < \varepsilon$$

et de même pour g . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \bar{S}_\Delta(fg) - \underline{S}_\Delta(fg) &= \sum_j ((\overline{fg})_j - (\underline{fg})_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_j (\bar{f}_j \bar{g}_j - \underline{f}_j \underline{g}_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_j (\bar{f}_j \bar{g}_j - \underline{f}_j \bar{g}_j + \underline{f}_j \bar{g}_j - \underline{f}_j \underline{g}_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \bar{g} \sum_j |\bar{f}_j - \underline{f}_j|(x_j - x_{j-1}) + \bar{f} \sum_j |\bar{g}_j - \underline{g}_j|(x_j - x_{j-1}) \\ &< (\bar{f} + \bar{g})\varepsilon. \end{aligned}$$

□

La positivité à la conséquence suivante :

Corollaire 5.5. *Si f est intégrable, alors $\underline{f} \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \bar{f} \cdot (b - a)$.*

6. Intégrabilité des fonctions continues

Théorème 6.1. *Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est Riemann intégrable.*

Démonstration. On vérifie le critère d'intégrabilité. La continuité de f (l'hypothèse) entraîne l'uniforme continuité sur $[a, b]$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x, x' \in [a, b] \quad \text{et} \quad |x - x'| < \delta(\varepsilon) \quad \text{on a} \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Alors pour toute subdivision de norme $< \delta(\varepsilon)$ on a

$$\bar{S}(f) - \underline{S}(f) = \sum_j (\bar{f}_j - \underline{f}_j)(x_j - x_{j-1}) < \sum_j \varepsilon (x_j - x_{j-1}) = (b - a) \varepsilon.$$

□

Théorème 6.2 (Leibniz-Newton). *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable et $F' = f$, c'est-à-dire F est une primitive de f .

Démonstration. Soit $x \in]a, b]$ et $h > 0$. On a

$$|F(x+h) - F(x) - h f(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_x^{x+h} f(x) dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt$$

et donc, en utilisant les bornes de f (continue sur $[a, b]$), on arrive à

$$|F(x+h) - F(x) - h f(x)| \leq h(\bar{f} - \underline{f}).$$

□