Théorème de Heine–Cantor

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. La fonction f est dite *uniformément continue* sur D si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in D, \qquad |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

La différence essentielle avec la continuité en un point a est que, dans la continuité uniforme, le même δ doit fonctionner pour tous les points $x, y \in D$.

Théorème 0.1 (Théorème de Heine–Cantor [1])**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Fondamental est que $[a, b]$ soit un intervalle fermé et borné, donc compact.

Démonstration. Supposons que f ne soit pas uniformément continue sur $[a, b]$.

La négation de l'uniforme continuité est

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x_\delta, y_\delta \in [a, b] \quad \text{tels que} \quad |x_\delta - y_\delta| < \delta \quad \text{et} \quad |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

On applique cette propriété avec

$$\delta = \frac{1}{n}.$$

Pour chaque $n \geq 1$, il existe donc $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

et

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

La suite (x_n) est contenue dans le segment $[a, b]$, donc elle est bornée. D'après le théorème de Bolzano–Weierstrass, on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers un point $x \in [a, b]$:

$$x_{n_k} \longrightarrow x.$$

Comme

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \longrightarrow 0,$$

on en déduit

$$y_{n_k} \longrightarrow x.$$

La fonction f est continue en x. Par conséquent,

$$f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x) \qquad \text{et} \qquad f(y_{n_k}) \longrightarrow f(x).$$

1. https://www.youtube.com/watch?v=raTChqHosqE

Ainsi,

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \longrightarrow 0.$$

Mais, par construction,

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$$

pour tout k, ce qui est impossible.

On obtient une contradiction. Donc f est uniformément continue sur $[a, b]$. □

Voyons quelques exemples.

1) Considérons

$$f(x) = \tan x.$$

sur l'intervalle ouvert $]-\pi/2, \pi/2[$.

La fonction tan est continue sur

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

mais elle n'y est pas uniformément continue.

Posons

$$x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, \qquad y_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Alors

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0,$$

mais $\tan x_n$ et $\tan y_n$ deviennent arbitrairement grands et leur différence ne tend pas vers 0.

On peut aussi voir le problème à partir de la dérivée

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

qui devient arbitrairement grande lorsque x approche $\pi/2$ ou $-\pi/2$.

Considérons maintenant la fonction sur un compacte. Fixons $0 < a < \pi/2$. Sur le segment $[-a, a]$, la fonction tan est continue. Par Heine–Cantor, elle est donc uniformément continue.

On peut même obtenir une estimation plus précise. Pour tout $x \in [-a, a]$,

$$|\tan'(x)| = \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 a}.$$

Le théorème des accroissements finis donne alors, pour tous $x, y \in [-a, a]$,

$$|\tan x - \tan y| \leq \frac{1}{\cos^2 a}|x - y|.$$

2) La fonction

$$f(x) = x^2$$

est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Prenons

$$x_n = n, \qquad y_n = n + \frac{1}{n}.$$

Alors

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

mais

$$|f(y_n) - f(x_n)| = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \longrightarrow 2.$$

En revanche, sur tout segment $[-A, A]$, la fonction x^2 est uniformément continue, soit par Heine–Cantor, soit on peut observer que

$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq 2A|x - y|.$$

3) La compacité est suffisante, mais pas nécessaire pour avoir l'uniforme continuité.

Par exemple,

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad x \in [0, +\infty[,$$

est uniformément continue, même si $[0, +\infty[$ n'est pas compact.

En effet, pour $x, y \geq 0$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 \leq |x - y|.$$

Donc

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, il suffit de choisir

$$\delta = \varepsilon^2.$$

Alors

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon.$$