Analyse approfondie – 2025-2026

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 3 (suite)

Exercice 1. Calculer $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$ en utilisant un changement de variable.

Exercice 2. On rappelle que la longueur de la courbe C paramétrée par $x = u(t)$ et $y = v(t)$, où $t \in [a, b]$, avec u et v de classe $\mathcal{C}^1$, est

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}\, dt.$$

1) Calculer la longueur de la cycloïde

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

où $t \in [0, 2\pi]$.

2) Calculer la longueur de la courbe caténaire $y = a \cosh \frac{x}{a}$, $a > 0$, entre le sommet $A = (0, a)$ et le point $B = (b, h)$.

Exercice 3. On rappelle que le volume du solide de révolution délimité par la surface de révolution de la courbe $y = f(x)$ autour de l'abscisse entre $x = a$ et $x = b$ est donné par la formule

$$V_f = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

1) Calculer le volume du solide délimité par la parabole $y = ax - x^2$, $a > 0$, avec $0 \le x \le a$.
2) Calculer le volume de l'ellipsoïde de rotation défini par la rotation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

autour de l'abscisse.

Exercice 4. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non nulle. Démontrer que $\int_a^b f(t)\, dt > 0$.

Exercice 5. Démontrer les inégalités ci-dessous.

1) $\int_0^1 x^n e^x\, dx < e - 1$
2) $\int_0^1 e^{x^2}\, dx < e - 1$
3) $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^4} < \frac{87}{68}$

Exercice 6. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On considère les deux subdivisions de $[a, b]$, $\Delta_1 = [a < b]$ et $\Delta_2 = [a < \frac{1+b}{2} < b]$ – on dit que Δ_2 est *plus fine* que Δ_1. Montrer que les sommes de Darboux satisfont les inégalités

$$\underline{\sigma}_{\Delta_1}(f) \le \underline{\sigma}_{\Delta_2}(f) \le \overline{\sigma}_{\Delta_2}(f) \le \overline{\sigma}_{\Delta_1}(f).$$

Exercice 7. En utilisant le critère d'intégrabilité, montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable dans le sens de Riemann, et si $c \in \,]a, b[$, alors f est intégrable dans le sens de Riemann sur $[a, c]$ (et sur $[c, b]$ bien sûr).