Université d'Angers
Département de Mathématiques

Analyse approfondie — 2025-2026

Feuille d'exercices n° 2 — limites et continuité

Exercice 1. En revenant à la définition, calculer les limites suivantes.

1) Si $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ est définie par $x \mapsto x^2+1$, alors $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

2) Si $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est définie par $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 2. Démontrer les affirmations suivantes.

1) Une intersection finie d'intervalles ouverts centrés en 2 est un intervalle ouvert centré en 2.

2*) L'affirmation précédente est-elle encore vraie si l'intersection est infinie ?

3) Soit I un intervalle de longueur finie d'extrémités a et b, $a < b$. Soit $c \in I$ différent de a et de b. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert centré en c et contenu dans I.

Exercice 3. Donner explicitement la définition (en ε et δ) des affirmations ci-dessous.

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$ (iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\cos x}{2x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin(2x))^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. On veut démontrer que f n'admet pas de limite en 0.

1) Trouver deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ qui tendent vers 0 et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = 0$.

2) Conclure.

3) Traduire à l'aide des quantificateurs les propriétés suivantes :

a) *La fonction g ne tend pas vers ℓ quand x tend vers x_0.*

b) *La fonction g n'a pas de limite quand x tend vers x_0.*

4*) Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$ est dit *connexe par arcs* si pour tous $p, q \in S$ il existe une application $\gamma = \gamma_{p,q} : [0,1] \to S$ continue, telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$. Montrer que $G_f \cup \{(0,0)\}$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ différente de a et telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 7. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite périodique si il existe $T \neq 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x+T) = f(x)$.

Montrer qu'une fonction périodique est constante si et seulement si la fonction admet une limite (finie) en $+\infty$. (*Indication :* Pour le sens difficile, faire un dessin et raisonner par l'absurde en utilisant une variante de l'exercice 6.)

Exercice 8. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite en $+\infty$. (*Indication :* Écrire la négation d'avoir une limite.) Quelle est la valeur de cette limite ?

Exercice 9.

1) Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant la droite $y = x$ comme asymptote oblique à $+\infty$ et qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists u_n, v_n \geq n \quad \text{tels que} \quad f(u_n) > u_n \quad \text{et} \quad f(v_n) < v_n.$$

2) Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $G_h \subset \mathbb{S}^1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Quel est le nombre minimal de points de continuité de h ? Justifier la réponse. Donner un exemple d'une fonction vérifiant cette propriété.

Exercice 10. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) L'image par f d'un segment (intervalle fermé et borné) est un segment.
2) L'image par f d'une partie bornée est bornée.
3) L'image réciproque par f d'un intervalle est un intervalle.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$. Tracer sa courbe représentative et étudier sa continuité.

Exercice 12.

1) Déterminer toutes les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

2*) Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)\, f(y).$$

(*Indication :* Traiter successivement les cas où x et y appartiennent à $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Pour le 2) il faut remarquer qu'une telle fonction est strictement croissante et, finalement, continue.)

Exercice 13. Soient $a < b$ et soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie.

Ce résultat peut apparaître sous une autre forme : *Si $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors il existe deux points diamétralement opposés en lesquels g prend la même valeur.*

Exercice 14. Soit $n \geq 3$ un entier et soit P un polygone ayant n côtés. Démontrer que pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ il existe une droite $\mathcal{D}_\theta$ qui sépare le polygone en deux parties ayant la même aire.

Exercice 15. Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une infinité de solutions réelles.

Exercice 16. Démontrer que $T_4(x) = \cos(4 \arccos x)$ est une fonction polynomiale de degré 4, de coefficient dominant 2^{4-1} et définie sur $[-1,1]$.

1) Ésquisser le graphe de T_4 (ou T_5 ou T_n).

2) Montrer que toute autre fonction polynomiale F de degré 4, $F : [-1,1] \to [-1,1]$, de coefficient dominant 2^{4-1}, vérifie $\sup |F| \geq 1$, avec égalité si et seulement si $F = T_4$. (*Indication :* Raisonner par l'absurde en étudiant le comportement de $T_4 - F$. Les points de maximum et de minimum de T_4 seront utiles. Pour l'égalité il faut utliser de plus la notion de multiplicité et un dessin.)