Analyse approfondie — 2025-2026

Feuille d'exercices n° 1 — $\mathbb{R}$ et quelques éléments de topologie

Exercice 1. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble. Écrire en utilisant des quantificateurs les affirmations ci-dessous.

1) 1 est un majorant de E / -12 n'est pas un minorant de E
2) E est majoré / E n'est pas minoré / E n'est pas borné
3) 1 est un majorant de E et $1 \neq \sup E$

Exercice 2. Pour chacun des sous-ensembles ci-dessous, déterminer les bornes sup et inf, puis, si possible, déterminer le plus grand et le plus petit élément.

(i) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ (ii) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ (iii) $\left\{\frac{n-3}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$

(iv) $[0, 1[$ (v) $\{0\} \cup [1, 2]$ (vi) $\left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\right\}$

Exercice 3. On considère le sous-ensemble $E = \{x \mid x^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$. On pourrait commencer avec l'inégalité $x^2 < 4$.

1) Donner un majorant de E.
2) Donner la borne sup de E.
3) En reprenant la démonstration du cours, donner l'entier μ_0 ainsi que les trois premières décimales, μ_1, μ_2 et μ_3 apparaissant dans la construction de $\sup E$.
4) Pour $\varepsilon = 10^{-2}$, donner un élément $a_\varepsilon \in E$ construit dans la démonstration du cours tel que

$$-\varepsilon + \sup E < a_\varepsilon \leq \sup E.$$

Exercice 4. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble non vide, minoré. On veut démontrer que E admet une borne inférieure, notée $\inf E$. L'idée est de montrer que $\inf E = \sup S$, où S est défini ci-dessous.

1) On considère le sous-ensemble $S = \{m \mid m \text{ minorant de } E\}$.
   a) Montrer que $S \subset \mathbb{R}$ est majoré. On pose $\sigma = \sup S \in \mathbb{R}$. (Pourquoi a-t-on $\sigma \in \mathbb{R}$?).
   b) Démontrer (par l'absurde par exemple) que σ est un minorant de E.
2) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que $\sigma \leq x_\varepsilon < \sigma + \varepsilon$.

Exercice 5. Soit $a > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{a^n}{n!}$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante pour n suffisamment grand.
2) En remarquant que $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1}\frac{a^n}{n!}$, justifier que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 6 (Le nombre e)**.** On sait que e s'exprime comme la somme infinie $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$.

1) Démontrer que $2 < e < 3$. Pour établir la deuxième inégalité on pourrait utiliser l'inégalité $k! > 2^{k-1}$ valable pour tout entier $k \geq 2$ — qui devrait être justifiée aussi.
2) On veut démontrer que e n'est pas rationnel. On suppose par l'absurde que e est rationnel, $e = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, $q \geq 2$ et $p \wedge q = 1$.
   a) Justifier que $q!\,e \in \mathbb{N}$ et que $q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) \in \mathbb{N}$.
   b) En s'inspirant de l'argument pour la deuxième inégalité du 1), montrer que

$$q!\left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + \cdots\right) < \frac{1}{q}.$$

c) Conclure en inspectant l'identité

$$q!\,e - q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = q!\left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + \cdots\right).$$

3) Si $E = [0, e[\cap \mathbb{Q}$, déterminer $\sup E$ et $\max E$, s'il existe.

Exercice 7 (* Le nombre π)**.** On sait que π est le demi-périmètre du cercle de rayon 1 et que $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. On veut démontrer que π est irrationnel.

1) Soit $I_n(x) = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n \cos(xt)\,dt$, où $n \in \mathbb{N}$. En intégrant par partie deux fois, établir, pour tout $n \geq 2$, la relation de récurrence

$$I_n(x) = \frac{2n(2n-1)}{x^2}\, I_{n-1}(x) - \frac{4n(n-1)}{x^2}\, I_{n-2}(x)$$

2) Soit $J_n(x) = x^{2n+1} I_n(x)$. Démontrer que

$$J_n(x) = 2n(2n-1)J_{n-1}(x) - 4n(n-1)x^2\, J_{n-2}(x).$$

3) Calculer $J_0(x)$ et $J_1(x)$. Puis démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n(x) = 2^{n+1}n!\big(P_n(x)\sin(x) + Q_n(x)\cos(x)\big)$, avec P_n et Q_n deux polynômes de degré au plus n à coefficients entiers (qui dépendent de n).

4) Supposer par l'absurde que π est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe des entiers positifs a et b tels que $\frac{1}{2}\pi = \frac{a}{b}$. Particulariser $x = \frac{\pi}{2}$ dans les calculs ci-dessus.

a) Montrer que $0 < I_n\big(\frac{\pi}{2}\big) < 2$.

b) Montrer que $\frac{a^{2n+1}}{n!}\, I_n\big(\frac{\pi}{2}\big) = 2^{n+1}\, b^{2n+1}\, P_n\big(\frac{\pi}{2}\big) \in \mathbb{Z}$.

c) Conclure en utilisant la limite de l'exercice 5.

Exercice 8. Le but de cet exercice est de montrer qu'on peut passer à la borne supérieure (resp. inférieure) dans les inégalités. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq g(x)$. Montrer que

$$\sup\{f(x) \mid x \in I\} \leq \sup\{g(x) \mid x \in I\}.$$

Que devient cette inégalité si les fonctions satisfont $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in I$? Donner un exemple pour illustrer la réponse.

Exercice 9.

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. Extraire deux sous-suites différentes de $(u_n)_n$.

2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Trouver une sous-suite croissante (resp. décroissante) et convergente de $(v_n)_n$.

3) Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ divergentes, contenues dans $[-1, 1]$, et telles que pour tout n on a $|u_n - v_n| < \frac{1}{n}$.

Exercice 10. Soit P_n le polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité $\mathbb{S}^1$. Calculer son aire σ_n et calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n$.

Exercice 11. Soit $X \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble borné tel que $\inf X, \sup X \notin X$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x'_\varepsilon, x''_\varepsilon \in X$ tel que

$$x''_\varepsilon - x'_\varepsilon > \sup X - \inf X - \varepsilon.$$

Exercice 12. Soit $X \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation de X. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ avec $x_n \in X$ pour tout n naturel tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. L'affirmation réciproque est-elle vraie ?