Analyse approfondie – 2026-2027

Exercice n° 9 le la feuille n° 2

1) Déterminer toutes les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

2*) Déterminer toutes les applications non nulles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)\, f(y).$$

(*Indication:* Traiter successivement les cas où x et y appartiennent à $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Pour le 2) il faut remarquer qu'une telle fonction est strictement croissante et, finalement, continue.)

Rappel. Une fonction satisfaisant

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

est dite additive. Sans hypothèse de régularité, il existe des fonctions additives très pathologiques. La continuité élimine ces solutions : une fonction additive continue est nécessairement linéaire.

La stratégie classique est de déterminer successivement les valeurs sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, puis sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1) On cherche les fonctions additives continues. Supposons

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

On commence par voir que f est impaire. D'abord, en prenant $x = y = 0$, on a

$$f(0) = f(0) + f(0),$$

donc

$$f(0) = 0.$$

Puis, comme pour tout x,

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

on en déduit que

$$f(-x) = -f(x).$$

On note

$$c = f(1).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence, $f(n) = nc$. Puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'imparité donne encore

$$f(n) = nc.$$

Soit maintenant $q = p/r \in \mathbb{Q}$, avec $r \geq 1$. Comme

$$rq = p,$$

l'additivité donne

$$rf(q) = f(rq) = f(p) = pc.$$

Donc

$$f(q) = \frac{p}{r}c = qc.$$

Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{Q}$,

$$f(q) = cq.$$

Soit enfin $x \in \mathbb{R}$. Choisissons une suite de rationnels $(q_n)_n$ telle que

$$q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

Comme f est continue,

$$f(q_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Mais,

$$f(q_n) = cq_n \to cx.$$

Par unicité de la limite,

$$f(x) = cx.$$

Réciproquement, toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = cx$$

est continue et additive.

2) On cherche les fonctions additives et multiplicatives. On suppose maintenant f non identiquement nulle et vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(xy) = f(x)f(y).$$

Comme précédemment,

$$f(0) = 0.$$

D'autre part,

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2.$$

Donc $f(1) \in \{0, 1\}$. Si $f(1) = 0$, alors pour tout x,

$$f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse que f est non nulle. Ainsi

$$f(1) = 1.$$

Par le même raisonnement additif que précédemment,

$$f(q) = q \qquad \forall q \in \mathbb{Q}.$$

Montrons maintenant que f est strictement croissante. Si $x > 0$, il existe $y \neq 0$ tel que

$$x = y^2.$$

Alors

$$f(x) = f(y^2) = f(y)^2 \geq 0.$$

En fait $f(y) \neq 0$ lorsque $y \neq 0$. En effet, si $f(y) = 0$, alors

$$1 = f(1) = f\left(y\frac{1}{y}\right) = f(y)f(1/y) = 0,$$

contradiction. Donc

$$f(x) > 0 \qquad \text{pour tout } x > 0.$$

Si $x < y$, alors $y - x > 0$, donc

$$f(y) - f(x) = f(y - x) > 0.$$

Ainsi

$$f(x) < f(y).$$

La fonction f est strictement croissante.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$, pour tout n on peut choisir des rationnels q_n, r_n tels que

$$q_n < x < r_n, \qquad q_n \to x, \qquad r_n \to x.$$

Comme f est croissante,

$$f(q_n) < f(x) < f(r_n).$$

Or f fixe les rationnels, donc

$$q_n < f(x) < r_n.$$

En faisant tendre n vers l'infini, le théorème d'encadrement donne

$$f(x) = x.$$

La seule solution non nulle est donc

$$f(x) = x.$$

Si l'on supprimait l'hypothèse "non nulle", il faudrait ajouter la solution $f \equiv 0$.