

Analyse approfondie – 2026-2027

EXERCICES N° 9 ET 10 DE LA FEUILLE N° 1

Donner tous les points d'accumulation (adhérence) pour chaque sous-ensemble de l'exercice 2. On applique la caractérisation de l'accumulation ou de l'adhérence suggérée par l'exercice 10.

Théorème (exercice 10). Si $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, alors

- a est un point d'accumulation de S si et seulement si il existe une suite $(x_n)_n$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in S \setminus \{a\} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$$

- a est un point d'adhérence de S si et seulement si il existe une suite $(x_n)_n$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in S \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$$

Démonstration. On développe la preuve pour les points d'accumulation. Pour les points d'adhérence la preuve est identique si on enlève chaque apparition de " $\setminus \{a\}$ ".

Si a est un point d'accumulation, alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in S \setminus \{a\} \quad \text{tel que} \quad |a_\varepsilon - a| < \varepsilon.$$

On prend $\varepsilon = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient $x_n = a_{1/n}$ tel que

$$x_n \in S \setminus \{a\}$$

et que

$$0 \leq |x_n - a| < \frac{1}{n}.$$

Alors, par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - a| = 0$ c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$.

Réciproquement, si la suite existe, on veut vérifier la définition de " a point d'accumulation de S ". Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la limite pour la suite $(x_n)_n$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N(\varepsilon)$,

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

On prend

$$a_\varepsilon = x_{N(\varepsilon)}.$$