Analyse approfondie – 2026-2027

Exercice n° 6 le la feuille n° 2

1) Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant la droite $y = x$ comme asymptote oblique à $+\infty$ et qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists u_n, v_n \geq n \quad \text{tels que} \quad f(u_n) > u_n \quad \text{et} \quad f(v_n) < v_n.$$

2) Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $G_h \subset \mathbb{S}^1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Quel est le nombre minimal de points de continuité de h ? Justifier la réponse. Donner un exemple d'une fonction vérifiant cette propriété.

Solution.

1) On cherche f telle que $f(x) - x \to 0$ en $+\infty$, mais dont le signe de $f(x) - x$ change infiniment souvent. Posons

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

— La droite $y = x$ est asymptote oblique à $+\infty$: $|f(x) - x| \leq \dfrac{1}{1+x^2} \to 0$.

— Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ et $v_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$. On a $u_n \geq n$, $v_n \geq n$, et

$$f(u_n) - u_n = \frac{1}{1+u_n^2} > 0, \qquad f(v_n) - v_n = \frac{-1}{1+v_n^2} < 0,$$

soit $f(u_n) > u_n$ et $f(v_n) < v_n$.

La courbe de f coupe donc l'asymptote une infinité de fois, en oscillant de part et d'autre : la position de la courbe par rapport à son asymptote n'est pas forcément « stable » au voisinage de $+\infty$.

2) Le nombre minimal de points de continuité est 1.

Pour justifier cette réponse, soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $G_h \subset \mathbb{S}^1$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$x^2 + h(x)^2 = 1,$$

donc

$$h(x) = \varepsilon(x)\sqrt{1-x^2} \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \in \{-1, +1\}.$$

— *h est toujours continue en 1.* On a $h(1) = 0$ et $|h(x) - h(1)| = \sqrt{1-x^2} \to 0$ quand $x \to 1$. Donc h a *au moins* un point de continuité.
Un exemple où c'est le seul. Posons

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Son graphe est bien contenu dans $\mathbb{S}^1$. Soit $x_0 \in [0,1[$ et posons $r = \sqrt{1-x_0^2} > 0$. Par densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe une suite de rationnels (x_n) et une suite d'irrationnels (y_n) de $[0,1]$, toutes deux de limite x_0. Alors

$$h(x_n) \to r \quad \text{et} \quad h(y_n) \to -r.$$

Si h était continue en x_0, ces deux limites seraient égales à $h(x_0)$, donc $r = -r$, i.e. $r = 0$ ce qui est faux ! Donc h est discontinue en tout point de $[0,1[$ et son seul point de continuité est 1.

Remarque. Plus généralement, si h est continue en $x_0 \in [0,1[$, alors $h(x_0) \neq 0$ et h garde le même signe au voisinage de x_0, donc ε est constante près de x_0. Pour que h soit continue *partout*, il suffit de prendre ε constante : $h = \pm\sqrt{1-x^2}$.