Analyse approfondie – 2026-2027

Exercice n° 5 le la feuille n° 2

Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite en $+\infty$. Quelle est la valeur de cette limite ? (*Indication:* Introduire $\ell = \sup_{x\in I} f(x)$ et traduire, avec ε, le fait que $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $f(I)$.)

Solution.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ croissante et majorée, où I est un intervalle non majoré (par exemple $\mathbb{R}$ ou $[a, +\infty[$).

L'ensemble $f(I)$ est non vide et majoré, donc il admet une borne supérieure $\ell = \sup f(I) \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $\ell - \varepsilon$ est strictement plus petit que ℓ, donc n'est pas un majorant de $f(I)$:

$$\exists x_\varepsilon \in I \quad \text{tel que} \quad -\varepsilon + \ell < f(x_\varepsilon).$$

Soit maintenant $x \in I$ avec $x \geq x_\varepsilon$. Alors

$$\ell - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon,$$

la deuxième inégalité par croissance de f, la troisième parce que ℓ est un majorant de $f(I)$. Donc

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On a ainsi montré

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A = x_\varepsilon \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geq A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

qui signifie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell = \sup_{x\in I} f(x).$$

Remarque.
1) Cette limite est en général *pas atteinte* : pour $f = \arctan$ on a $\sup f = \frac{\pi}{2}$ et $f(x) < \frac{\pi}{2}$ pour tout x.

2) Si f est croissante mais *non* majorée, le même raisonnement (avec un A quelconque à la place de $\ell - \varepsilon$) montre que $f(x) \to +\infty$. Une fonction croissante a donc toujours une limite en $+\infty$, dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.