Analyse approfondie – 2026-2027

Exercice n° 4 le la feuille n° 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. On veut démontrer que f n'admet pas de limite en 0.

1) Trouver deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ qui tendent vers 0 et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = 0$.

2) Conclure.

3) Traduire à l'aide des quantificateurs les propriétés suivantes :

a) *La fonction g ne tend pas vers ℓ quand x tend vers x_0.*

b) *La fonction g n'a pas de limite quand x tend vers x_0.*

4*) Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$ est dit *connexe par arcs* si pour tous $p, q \in S$ il existe une application $\gamma = \gamma_{p,q} : [0,1] \to S$ continue, telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$. Montrer que $G_f \cup \{(0,0)\}$ n'est pas connexe par arcs.

Solution.
Notons $G_f = \left\{(x, \sin \frac{1}{x}) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^*\right\}$ le graphe de f.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{(n+1)\pi}.$$

Ce sont des suites de réels *non nuls* (donc à valeurs dans le domaine de f) qui tendent vers 0, et

$$f(u_n) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\Big) = 1, \qquad f(v_n) = \sin\big((n+1)\pi\big) = 0.$$

(On a pris $n+1$ et non n pour que v_0 soit défini.)

2) On utilise le lemme ci-dessous.

Lemme (sens facile de la caractérisation séquentielle)**.** *Si $f(x) \to \ell$ quand $x \to 0$ et si (x_n) est une suite de $\mathbb{R}^*$ qui tend vers 0, alors $f(x_n) \to \ell$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$0 < |x| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Comme $x_n \to 0$, il existe $N = N_{\delta(\varepsilon)}$ tel que $|x_n| < \delta(\varepsilon)$ pour tout $n \geq N$. Donc $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. □

Conclusion. Supposons par l'absurde que f admette une limite ℓ en 0. D'après le lemme appliqué à (u_n), la suite $(f(u_n))$, constante égale à 1, tend vers ℓ ; par unicité de la limite d'une suite, $\ell = 1$. Appliqué à (v_n), le lemme donne de même $\ell = 0$. Donc $1 = 0$, une contradiction.

3) Soit $g : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ (adhérent à D). Rappelons que $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ signifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in D, \quad 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |g(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Règle pour écrire une négation.. On lit la phrase de gauche à droite : chaque $\forall$ devient $\exists$ et réciproquement, et à la fin on nie la conclusion. En particulier la négation de « $P \Rightarrow Q$ » est « P *et* (non Q) » ; l'implication disparaît.

(a) *g ne tend pas vers ℓ quand x tend vers x_0 :*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x_\delta \in D, \quad 0 < |x_\delta - x_0| < \delta \ \text{ et } \ |g(x_\delta) - \ell| \geq \varepsilon.$$

(b) *g n'a pas de limite en x_0.* « g a une limite » signifie $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \to \ell$. Sa négation est donc

$$\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon_l > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x_{l,\delta} \in D, \quad 0 < |x_{l,\delta} - x_0| < \delta \ \text{ et } \ |g(x_{l,\delta}) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Remarque. Différence entre (a) et (b) : en (a), ℓ est un nombre donné, fixé *avant* tout ; en (b), ℓ est quantifié par $\forall$ en premier, et le ε qui suit dépend de ℓ.

Il faut noter qu'on s'est borné au cas $\ell \in \mathbb{R}$. Si l'on considère aussi $\pm\infty$ comme des limites possibles, il faut ajouter que g ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$:

$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in D, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \text{ et } \ g(x) \leq A$$

et de même avec $g(x) \geq A$ pour $-\infty$.

Application à $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$.. Montrons directement (b), avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (valable pour tout ℓ). Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. Choisissons n assez grand pour que $u_n < \delta$ et $v_n < \delta$. On a $|f(u_n) - \ell| = |1 - \ell|$ et $|f(v_n) - \ell| = |\ell|$, et

$$|1 - \ell| + |\ell| \geq |(1 - \ell) + \ell| = 1,$$

donc l'un de ces deux nombres est $\geq \frac{1}{2}$. Le point correspondant (u_n ou v_n) est un x_δ qui convient.

4*) Posons $S = G_f \cup \{(0,0)\}$. Remarquons que $(0,0)$ est le *seul* point de S d'abscisse 0. Montrons qu'il n'existe pas de chemin continu dans S joignant $p = (0,0)$ à $q = (1, \sin 1)$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\gamma : [0,1] \to S$ continue avec $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$. Écrivons $\gamma(t) = (a(t), b(t))$. Les fonctions a et b sont continues.

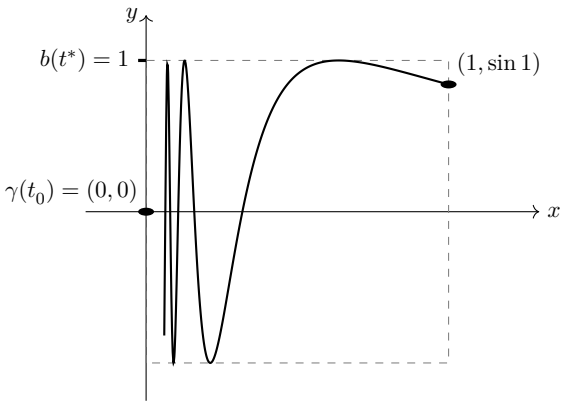

Figure 1 – Le chemin γ commence en $(0,0)$ et « suit » le graphe de f.

Étape 1 : dernier passage par l'axe des ordonnées. L'ensemble $A = \{t \in [0,1]\ ;\ a(t) = 0\}$ est fermé (image réciproque du fermé $\{0\}$ par a continue), borné et non vide ($0 \in A$). Il a donc un plus grand élément

$$t_0 = \max A.$$

On a $t_0 < 1$ car $a(1) = 1 \neq 0$. Comme $\gamma(t_0) \in S$ a pour abscisse 0, on a $\gamma(t_0) = (0,0)$, d'où $b(t_0) = 0$. Cette égalité nous fournira la contradiction.

Étape 2 : après t_0, on est sur le graphe. Pour $t \in]t_0, 1]$ on a $a(t) \neq 0$; comme a est continue et $a(1) = 1 > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires impose $a(t) > 0$ sur $]t_0, 1]$ (sinon a s'annulerait). Alors $\gamma(t) \in G_f$, c'est-à-dire

$$b(t) = \sin \frac{1}{a(t)} \quad \text{pour tout} \quad t \in]t_0, 1] \,.$$

Étape 3 : contradiction. La fonction b est continue en t_0 et $b(t_0) = 0$:

$$\exists \eta > 0 \ (\eta < 1 - t_0) \quad \text{tel que} \quad \forall t > 0, \quad t \in [t_0, t_0 + \eta] \implies |b(t)| < \frac{1}{2}. \tag{♯}$$

On prend $t_1 = t_0 + \eta$. On a $a(t_1) > 0$. Comme $a(t_0) = 0$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que a prend sur $[t_0, t_1]$ toutes les valeurs de $[0, a(t_1)]$. Or $u_n \to 0$ avec $u_n > 0$. Nous choisissons n tel que $u_n < a(t_1)$. Il existe donc $t^* \in [t_0, t_1]$ avec

$$a(t^*) = u_n > 0.$$

En particulier $t^* \neq t_0$, donc $t^* \in]t_0, t_1]$ et, d'après l'étape 2,

$$b(t^*) = \sin \frac{1}{u_n} = 1,$$

ce qui contredit $|b(t)| < \frac{1}{2}$ du (♯).

Donc S n'est pas connexe par arcs. *(Intuition : pour quitter l'origine et rejoindre le graphe, un chemin devrait osciller infiniment souvent entre -1 et 1 près de l'axe des ordonnées, ce que la continuité interdit.)*