Analyse approfondie – 2026-2027

Exercice n° 3 le la feuille n° 3

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1) Écrire la définition de l'uniforme continuité de f sur $[0, +\infty[$ en fixant explicitement $\varepsilon = 1$. On notera $\delta > 0$ le pas obtenu que l'on fixera pour la suite.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant une somme télescopique montrer que $|f(n\delta) - f(0)| \leq n$.

3) Soit $x \geq 0$. En utilisant la partie entière de $\frac{x}{\delta}$, encadrer x entre deux multiples successifs de δ. En déduire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $x \geq 0$ on a

$$|f(x)| \leq \alpha x + \beta.$$

Préciser les expressions de α et β.

4) La réciproque est-elle vraie ? (*Indication:* Cherchez une fonction f sous-linéaire (qui ne grandit pas plus vite qu'une droite) mais dont la pente (dérivée) locale devient arbitrairement grande ou oscille de plus en plus vite à l'infini. Pensez à combiner une fonction linéaire et une fonction trigonométrique.)

Solution.

1) En prenant $\varepsilon = 1$, la continuité uniforme de f entraîne

$$\exists \delta = \delta_1 > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x, x' \in [0, +\infty[\,,\ |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < 1.$$

Remarque. Comme f est continue, il s'ensuit (par passage à la limite) que

$$|x - x'| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq 1. \tag{♯}$$

2) On a, en utilisant (♯),

$$|f(n\delta) - f(0)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} f((k+1)\delta) - f(k\delta) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f((k+1)\delta) - f(k\delta)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

3) Par définition de la partie entière,

$$\left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor \leq \frac{x}{\delta} < \left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor + 1,$$

donc

$$\left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor \delta \leq x < \left(\left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor + 1 \right) \delta.$$

En utilisant l'argument invoqué dans 2), on obtient

$$|f(x) - f(0)| \leq \left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor + 1.$$

Alors

$$|f(x)| - |f(0)| \leq |f(x) - f(0)| \leq \left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor + 1 \leq \frac{x}{\delta} + 1,$$

c'est-à-dire

$$|f(x)| \leq \frac{x}{\delta} + (|f(0)| + 1) =: \alpha x + \beta.$$

4) Un contre-exemple est la fonction définie par $f(x) = x \sin x$. On aura besoin de borner inférieurement la fonction sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, Comme la fonction est concave, on a

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x.$$

(La première est la condition de con cavité en 0 et $\pi/2$; la deuxième est la concativé en 0 par rapport à la tangente.)

On considère les suites

$$x_n = 2n\pi \quad \text{et} \quad x'_n = 2n\pi + \frac{1}{n}.$$

Alors

$$|x_n - x'_n| \leq \frac{1}{n}$$

et

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{1}{n} \geq \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} > 4.$$

On en déduit que f n'est pas uniformément continue avec $\varepsilon_0 = 4$.