Analyse approfondie – 2025-2026

Exercice n° 2 de la feuille n° 3

Je voudrais discuter l'exercice n° 2 sans utiliser le deuxième point (la condition nécessaire pour la continuité uniforme sur $[0, +\infty[$) du premier exercice. Je reviendrais à cette condition dans la solution de l'exercice n° 1.

On rappelle qu'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |\varphi(x') - \varphi(x'')| < \varepsilon.$$

La négation prend la forme (directe)

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x'_\delta, x''_\delta \in I, |x'_\delta - x''_\delta| < \delta \quad \text{et} \quad |\varphi(x'_\delta) - \varphi(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

ou bien, en remplaçant δ par $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n, v_n \in I, |u_n - v_n| < \delta \quad \text{et} \quad |\varphi(u_n) - \varphi(v_n)| \geq \frac{1}{n}. \tag{$\sharp$}$$

Remarque. La forme ($\sharp$) a été utilisée en cours dans la preuve (par réduction à l'absurde) de l'affirmation *une fonction continue définie sur un intervalle fermé et borné et uniformément continue.*

1) On veut démontrer que $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue. On prend $\varepsilon_0 = 1$ dans ($\sharp$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut trouver $u_n < v_n$ tels que $v_n - u_n < \frac{1}{n}$ et que $f(v_n) - f(u_n) \geq 1$.

Pour $u_n < v_n$, en utilisant le théorème des accroissement finis, il existe c_n, $u_n < c_n < v_n$ tel que

$$f(v_n) - f(u_n) = v_n^2 - u_n^2 = 2c_n(v_n - u_n) > 2u_n(v_n - u_n).$$

On prend

$$u_n = n^2 \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{2n} = n^2 + \frac{1}{2n}$$

et ($\sharp$) est vérifiée.

2) On veut montrer que la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue. Soit $1 > \varepsilon > 0$. On veut trouver $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tous $x', x'' \in [0, +\infty[$ qui satisfont $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$, on a

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < \varepsilon.$$

Soient $x' > x'' \in [0, +\infty[$. On a

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sqrt{x'} - \sqrt{x''} = \frac{x' - x''}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} < \frac{x' - x''}{\sqrt{x'}} \tag{$\sharp$}$$

Il faut comprendre que le problème se pose quant x' est petit. Par exemple, si $x' \geq 1$, alors

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < \frac{x' - x''}{\sqrt{x'}} \leq x' - x''$$

et il suffirait de prendre $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

En regardant le graphe de la racine carrée sur l'intervalle $[0,1]$, on a l'idée de prendre $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Alors, si $x' \geq \varepsilon^2$, l'inégalité ($\sharp$) devient

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < \frac{x' - x''}{\sqrt{x'}} < \frac{x' - x''}{\sqrt{\varepsilon^2}} < \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2}} = \varepsilon$$

dès que $|x' - x''| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Et si $x' < \varepsilon^2$, alors

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sqrt{x'} - \sqrt{x''} \leq \sqrt{x'} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Deuxième méthode. On pourrait raisonner en s'appuyant sur le résultat du cours rappelé cidessus. On sait que $g|_{[0,1]}$ est uniformément continue. Sur $[1, +\infty[$ la fonction est uniformément continue en prenant $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ car, en utilisant l'inégalité des accroissement finis, si $x' > x'' \geq 1$, on a

$$g(x') - g(x'') = \sqrt{x'} - \sqrt{x''} < \frac{1}{2\sqrt{x''}}(x' - x'') \leq \frac{x' - x''}{2}.$$

Pour finir, il reste à justifier que g est uniformément continue sur l'union des deux intervalles. Ceci se justifie en prenant $\delta(\varepsilon)$ le minimum des deux delta et en remarquant que si $x'' < 1 < x'$ avec $x' - x'' < \delta(\varepsilon)$, alors

$$|g(x') - g(x'')| = |g(x') - g(1) + g(1) - g(x'')| \leq |g(x') - g(1)| + |g(1) - g(x'')| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

3) On veut démontrer que $h : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $h(x) = \tan x$ n'est pas uniformément continue. Le problème pour la continuité uniforme vient du comportement asymptotique de la fonction tangente quand son argument croit ver $\frac{\pi}{2}$.

On prend $\varepsilon_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $u_n < v_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$h(v_n) - h(u_n) = \tan(v_n) - \tan(u_n) = \big(1 + \tan(v_n)\tan(u_n)\big)\tan(v_n - u_n) \geq \tan(v_n - u_n).$$

En prenant $u_n = \frac{pi}{2} - \frac{2}{n}$ et $v_n = \frac{pi}{2} - \frac{1}{n}$, alors

$$h(v_n) - h(u_n) \geq \tan\frac{1}{n} > \frac{1}{n},$$

Donc ($\sharp$) est vérifiée.

Remarque. On a utilisé l'identité trigonométrique

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \, \tan b}$$

valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$a, b, a + b \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4) On veut démontrer que $k :]0, +\infty[\to [-1, 1]$, $k(x) = \sin\frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue. Le problème pour la continuité uniforme vient du comportement oscillatoire avec fréquence approchant 0 dans le voisinage de 0.

On prend $\varepsilon_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour vérifier ($\sharp$), il faut trouver $0 < v_n < u_n$ tels que $u_n - v_n < \frac{1}{n}$ et que

$$|\sin u_n - \sin v_n| \geq 1.$$

On prend $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Alors

$$u_n - v_n = \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2n\pi(2n\pi + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{4n(2n\pi + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{4(2n\pi + \frac{\pi}{2})} < \frac{1}{n}.$$