Analyse approfondie – 2025-2026

Exercice n° 2 (iii) de la feuille n° 1

Pour le sous-ensembles $S = \left\{ \frac{n-3}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, déterminer les bornes sup et inf, puis, si possible, déterminer le plus grand et le plus petit élément.

Solution.
L'inégalité $\frac{m-3}{m+1} < \frac{n-3}{n+1}$ est équivalente à

$$(m-3)(n+1) < (m+1)(n-3).$$

Successivement on obtient les équivalences

$$mn + m - 3n - 3 < mn - 3m + n - 3$$
$$4m < 4n.$$

Il s'ensuit que la fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(n) = \frac{n-3}{n+1}$$

est strictement croissante. Comme $S = \operatorname{im}(u)$, on en déduit que

$$\min S = \inf S = u(0) = -3.$$

Il reste à justifier que

$$\sup S = 1 = \lim_{n\to+\infty} u(n) \tag{$\sharp$}$$

et donc, que $\max S$ n'existe pas. Pour voir que $\sup S = 1$, soit $\varepsilon > 0$. Il faut montrer qu'il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$1 - \varepsilon < u(n_\varepsilon) = \frac{n_\varepsilon - 3}{n_\varepsilon + 1} \leq 1.$$

Comme successivement, on a les équivalences

$$1 - \varepsilon < \frac{n-3}{n+1} = 1 - \frac{4}{n+1}, \quad \frac{4}{n+1} < \varepsilon, \quad \frac{4}{\varepsilon} < n+1, \quad \frac{4}{\varepsilon} - 1 < n,$$

on prend

$$n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon} - 1 \right\rfloor + 1.$$

(On pourrait aussi prendre $n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon} \right\rfloor$.)

Remarque. Il existe le résultat théorique suivant[1] : *Si $(u_n)_n$ est une suite croissante et majorée, alors elle convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Dans la solution ci-dessus, on a calculé directement la borne sup du sous-ensemble $S = \left\{ \frac{n-3}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$ et on a remarqué en ($\sharp$) l'égalité de celle-ci avec la limite de la suite $u_n = u(n)$.

[1] Écrire une preuve de cette proposition !