Analyse approfondie – 2026-2027

Exercice n° 13 le la feuille n° 2

Démontrer que $T_4(x) = \cos(4 \arccos x)$ est une fonction polynomiale de degré 4, de coefficient dominant 2^{4-1} et définie sur $[-1, 1]$.

1) Ésquisser le graphe de T_4 (ou T_5 ou T_n).

2) Montrer que toute autre fonction polynomiale F de degré 4, $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, de coefficient dominant 2^{4-1}, vérifie $\sup |F| \geq 1$, avec égalité si et seulement si $F = T_4$. (*Indication:* Raisonner par l'absurde en étudiant le comportement de $T_4 - F$. Les points de maximum et de minimum de T_4 seront utiles. Pour l'égalité il faut utliser de plus la notion de multiplicité et un dessin.)

Solution.

1) Soit $x \in [-1, 1]$ et $\theta = \arccos x \in [0, \pi]$, de sorte que $x = \cos\theta$. Alors

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1,$$

$$T_4(x) = \cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2x^2-1)^2 - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Donc T_4 est la restriction à $[-1, 1]$ du polynôme $8x^4 - 8x^2 + 1$, de degré 4 et de coefficient dominant $8 = 2^{4-1}$.

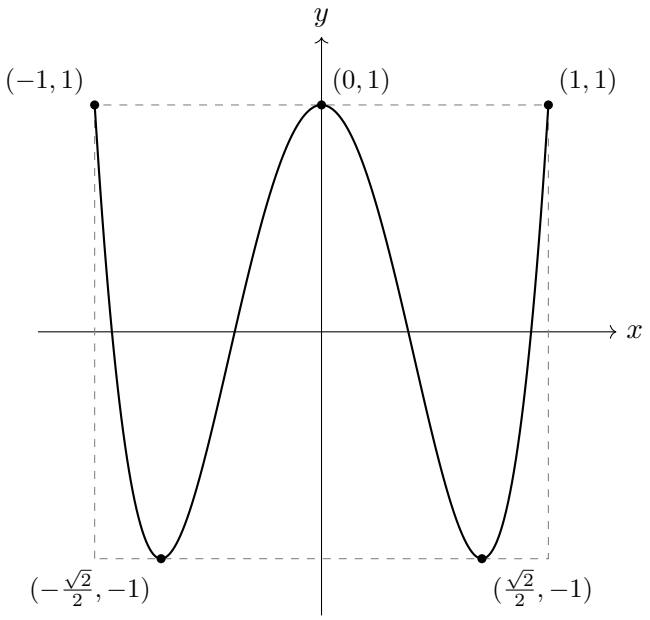
2) On a $T_4'(x) = 32x^3 - 16x = 16x(2x^2 - 1)$, qui s'annule en 0 et $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Posons

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{4}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

soit $x_0 = 1 > x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} > x_2 = 0 > x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} > x_4 = -1$. Comme $\frac{k\pi}{4} \in [0, \pi]$, on a $\arccos x_k = \frac{k\pi}{4}$ et donc

$$T_4(x_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k. \qquad (*)$$

Le graphe de T_4 a la forme d'un « W » : il part de $(-1, 1)$, descend jusqu'au minimum $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$, remonte au maximum local $(0, 1)$, redescend au minimum $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$, et remonte jusqu'à $(1, 1)$. Il reste dans la bande $-1 \leq y \leq 1$ et coupe l'axe des abscisses en $\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8}$, $\cos\frac{7\pi}{8}$.



Remarque. Plus généralement $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1}, et $T_n(\cos\frac{k\pi}{n}) = (-1)^k$ pour $k = 0, \ldots, n$: le graphe oscille n fois entre -1 et 1.

Soit F un polynôme de degré 4 et de coefficient dominant 8. Posons

$$M = \sup_{[-1,1]} |F|.$$

Remarquons que $\sup_{[-1,1]} |T_4| = 1$ (car pour tout x, $|\cos(x)| \leq 1$, avec égalité en $x_0 = 1$). Nous allons montrer

1. $M < 1$ n'est jamais vérifiée
2. $M = 1 \Longrightarrow F = T_4$

Ces deux affirmations impliquent que $M \geq 1$ avec égalité si et seulement si $F = T_4$.

Preuve de 1). Posons $Q = T_4 - F$. Comme les deux polynômes ont le même coefficient dominant, $\deg Q \leq 3$; notons que $Q \neq 0$ par hypothèse. Donc

$$Q \text{ a au plus 3 racines, comptées avec multiplicité.}$$

Si $M < 1$, alors

$$Q(x_0) = 1 - F(x_0) > 0, \quad Q(x_2) = 1 - F(x_2) > 0, \quad Q(x_4) = 1 - F(x_4) > 0$$

et

$$Q(x_1) = -1 - F(x_1) < 0, \qquad Q(x_3) = -1 - F(x_3) < 0$$

Ainsi Q change de signe sur chacun des quatre intervalles

$$]x_0, x_1[\,, \quad]x_1, x_2[\,, \quad]x_2, x_3[\,, \quad]x_3, x_4[\,.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, Q possède au moins une racine dans chacun de ces intervalles, donc au moins quatre racines distinctes. On est arrivé à une contradiction. □

Preuve de 2). Si $M = 1$, alors aux cinq points précédents nous avons

$$Q(x_0) \geq 0, \quad Q(x_1) \leq 0, \quad Q(x_2) \geq 0, \quad Q(x_3) \leq 0, \quad Q(x_4) \geq 0.$$

Si $Q(x_i) = 0$ pour un point intérieur x_i, c'est-à-dire avec $i = 1, 2, 3$, alors

$$F(x_i) = T_4(x_i) = \pm 1.$$

Comme $|F(x)| \leq 1$ sur $[-1, 1]$, le point x_i est alors un point de maximum ou de minimum local de F. Par conséquent

$$F'(x_i) = 0.$$

Or x_1, x_2, x_3 sont aussi des extrema de T_4, donc $T_4'(x_i) = 0$. Ainsi

$$Q'(x_i) = T_4'(x_i) - F'(x_i) = 0.$$

Donc toute racine de Q parmi les trois points intérieurs x_1, x_2, x_3 est de multiplicité au moins 2.

Regardons maintenant les quatre intervalles consécutifs $[x_i, x_{i+1}]$.

— Si aucun des deux endpoints n'est une racine de Q, les signes y sont strictement opposés et il existe une racine dans l'intervalle ouvert.

— Si un endpoint intérieur est une racine, cette racine peut être utilisée pour les deux intervalles adjacents, mais sa multiplicité est au moins 2.

— Si x_0 ou x_4 est une racine, elle compte au moins une fois pour l'unique intervalle adjacent.

Ainsi les quatre "changements d'alternance" imposent au total au moins quatre zéros comptés avec multiplicité.

Un polynôme non nul de degré au plus 3 ne peut avoir quatre zéros comptés avec multiplicité. On doit donc avoir $Q \equiv 0$, c'est-à-dire

$$F = T_4.$$