

Analyse approfondie – 2026-2027

EXERCICES N° 13¹ DE LA FEUILLE N° 1

Théorème. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point d'accumulation de l'intervalle I . Les affirmations suivantes sont équivalentes.

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
2. $\forall (x_n)_n \subset I \setminus \{a\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$

On rappelle les définitions des trois limites qui interviennent dans l'énoncé.

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall x \in I, 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a : \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell : \forall \varepsilon > 0, \exists N_f(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_f(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$

Démonstration. Pour “1) implique 2)”, on sait que (i) et (ii) sont vraies et on veut établir (iii).

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N_f(\varepsilon)$ pour une suite dans $S \setminus \{a\}$ qui converge vers a . Si on considère $n \geq N(\delta(\varepsilon))$, alors

$$0 < |x_n - a| < \delta(\varepsilon),$$

et d'après (i), on a

$$|f(x_n) - \ell| < \varepsilon.$$

Par conséquent, on prend $N_f(\varepsilon) = N(\delta(\varepsilon))$.

Pour “2) implique 1)” on démontre que **non 1)** implique **non 2)**.

Explicitement, **non 1)** : $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \delta > 0, \exists x_\delta \in I$ tel que

$$0 < |x_\delta - a| < \delta \quad \text{et} \quad |f(x_\delta) - \ell| \geq \varepsilon_0.$$

On prend $\delta = 1/n$ et on note $t_n = x_{1/n}$. Alors la suite $(t_n)_n$ vit dans $I \setminus \{a\}$ et converge vers a et la suite $(f(t_n))_n$ ne converge pas vers ℓ . On est arrivé à **non 2)**. $\square$

1. Dans une version précédente de la feuille, l'exercice était faux.