Analyse approfondie – 2025-2026

Exercice n° 12 le la feuille n° 1

Soit $X \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation de X. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ avec $x_n \in X$ pour tout n naturel tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. L'affirmation réciproque est-elle vraie ?

Solution.
Comme $a \in \mathbb{R}$ est un point accumulation de X, d'après la définition,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in X \quad \text{tel que} \quad 0 < |x_\varepsilon - a| < \varepsilon. \tag{$\sharp$}$$

La définition apparaissant en cours dit que $X \cap \big(\left]-\varepsilon + a, a + \varepsilon\right[\setminus \{a\}\big) \neq \emptyset$ et on voit qu'elle est équivalente à l'affirmation ci-dessus.

Maintenant, pour obtenir une suite qui converge vers a, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si on note $u_n = x_{\frac{1}{n}}$, on obtient une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Il reste à démontrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N(\varepsilon)$ on a

$$|u_n - a| < \varepsilon.$$

En contemplant ($\sharp$) et la construction de u_n, on prend $N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Alors, pour tout $n \geq \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$,

$$|u_n - a| = |x_{\frac{1}{n}} - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\varepsilon)} = \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$