Analyse approfondie – 2026-2027

Exercice n° 11 le la feuille n° 2

Soit $n \geq 3$ un entier et soit P un polygone ayant n côtés. Démontrer que pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ il existe une droite $\mathcal{D}_\theta$ qui sépare le polygone en deux parties ayant la même aire.

Solution.
Soit P le polygone (la région fermée bornée délimitée par une ligne polygonale fermée), d'aire $\mathrm{Aire}(P) > 0$. Fixons $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: les droites faisant l'angle θ avec l'axe des abscisses sont les droites de direction $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ (l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ paramètre toutes les directions de droites, une fois chacune). Soit $n = (-\sin\theta, \cos\theta)$ un des deux vecteurs orthogonaux à u de norme 1. On paramètre le faisceau des droites ayant n comme vecteur normal par $t \in \mathbb{R}$. On note, pour chaque t,

$$\Delta_t = \left\{p \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \langle p, n\rangle = t\right\} \quad \text{et} \quad H_t = \left\{p \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \langle p, n\rangle \leq t\right\}$$

la droite et le demi-plan qui est « en dessous » de la droite.

Remarque. On utilise les propriétés élémentaires de l'aire : croissance par rapport à l'inclusion, additivité, aire nulle pour une droite, aire $\ell \times L$ pour un rectangle de côtés ℓ, L.

Posons $A(t) = \mathrm{Aire}(P \cap H_t)$: c'est l'aire de la partie de P située sous Δ_t.

• **A est croissante et continue** – Comme P est borné, il est contenu dans un disque fermé de centre O et de rayon R. Pour $t < t'$, la différence $A(t') - A(t)$ est l'aire de $P \cap \{t < \langle p, n\rangle \leq t'\}$, partie contenue dans le rectangle de largeur $t' - t$ (selon n) et de longueur $2R$ (selon u). Donc

$$0 \leq A(t') - A(t) \leq 2R\,(t' - t).$$

Ainsi A est croissante et $2R$-lipschitzienne, en particulier continue.

• **Valeurs aux extrémités** – L'ensemble P est compact, donc la fonction continue $p \mapsto \langle p, n\rangle$ y atteint un minimum m et un maximum M.

Pour $t \leq m$, $P \cap H_t$ est contenu dans la droite Δ_m ou est l'ensemble vide, donc $A(t) = 0$. En particulier $A(m) = 0$.

Pour $t \geq M$, $P \subset H_t$ et $A(t) = \mathrm{Aire}(P)$. En particulier $A(M) = \mathrm{Aire}(P)$.

• **TVI** – La fonction A est continue sur $[m, M]$ et

$$A(m) = 0 < \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Aire}(P) < \mathrm{Aire}(P) = A(M).$$

D'après le TVI, il existe $t^* \in]m, M[$ tel que $A(t^*) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Aire}(P)$.

Conclusion. – Soit $\mathcal{D}_\theta = \Delta_{t^*}$. Elle sépare P en $P_- = P \cap H_{t^*}$, d'aire $\frac{1}{2}\,\mathrm{Aire}(P)$, et $P_+ = P \cap \{\langle p, n\rangle \geq t^*\}$. Comme $P_- \cap P_+ \subset \Delta_{t^*}$ est d'aire nulle, on a $\mathrm{Aire}(P_+) = \mathrm{Aire}(P) - \mathrm{Aire}(P_-) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Aire}(P)$. Les deux parties ont la même aire. □

Remarque. Le nombre de côtés ($n \geq 3$) ne joue aucun rôle, et la convexité non plus : le résultat vaut pour toute région bornée ayant une aire. Pour un polygone convexe, A est strictement croissante sur $[m, M]$, donc la droite $\mathcal{D}_\theta$ est unique.