Analyse approfondie – 2025-2026

EXERCICE N° 11 LE LA FEUILLE N° 1

Soit $X \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble borné tel que $\inf X, \sup X \notin X$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x'_\varepsilon, x''_\varepsilon \in X$ tel que

$$x''_\varepsilon - x'_\varepsilon > \sup X - \inf X - \varepsilon.$$

Solution.

En utilisant les caractérisations de bornes sup et inf avec ε , on a que pour $\varepsilon > 0$,

- il existe $b_\varepsilon \in X$ tel que $-\varepsilon + \sup X < b_\varepsilon$
- il existe $a_\varepsilon \in X$ tel que $a_\varepsilon < \inf X + \varepsilon$.

Alors, en échangeant les membres dans la deuxième inégalité et en sommant les deux, on obtient

$$-\varepsilon + \sup X - \inf X - \varepsilon < b_\varepsilon - a_\varepsilon$$

c'est-à-dire

$$b_\varepsilon - a_\varepsilon > \sup X - \inf X - 2\varepsilon.$$

On prend $x''_\varepsilon = b_{\frac{\varepsilon}{2}}$ et $x'_\varepsilon = a_{\frac{\varepsilon}{2}}$.