# Analyse approfondie

Cours de L2 MPCIE

**Laurent Meersseman**

LAREMA
Université d'Angers
13 avril 2022

# Table des matières

# Préface

Angers, le 21 avril 2021

Ce texte reprend le cours donné de janvier à mai 2021 dans l'UE Analyse Approfondie de L2. Il ne s'agit pas d'une retranscription fidèle du cours oral mais d'une légère réécriture. Certaines preuves sont différentes, des points évoqués brièvement en séance y sont détaillés et une section sur la continuité uniforme a été ajoutée.

Il faut donc voir ce polycopié comme un outil complémentaire qui ne saurait se substituer à la prise de notes en cours. Celle-ci reste capitale pour bien appréhender les relations entre les notions tout en favorisant une bonne mémorisation des définitions et techniques en jeu.

A vrai dire, en temps normal, je ne fais même pas de polycopié, cet objet hybride entre les notes personnelles et le livre publié. Mais nous ne sommes pas en temps normal et la situation exceptionnelle que nous vivons, avec un enseignement d'abord distanciel de l'UE puis hybride, c'est-à-dire fortement dégradé, m'a convaincu qu'il y avait, cette fois, nécessité d'en écrire un.

Pour en faire bon usage, je vous conseille d'étudier chaque partie en parallèle du cours suivi en streaming ou en vidéo. Avant la séance, une lecture rapide vous permet d'avoir déjà en tête les questions qui seront abordées et d'en profiter au mieux. Après la séance, une lecture approfondie vous sert à graver les notions dans votre mémoire, à reprendre et à affiner la compréhension des arguments.

De façon plus générale, ayez en tête qu'un texte mathématique ne se lit pas comme un roman de la première ligne à la dernière ligne. On commence par le survoler en s'arrêtant sur les définitions et les énoncés de théorèmes pour en comprendre la structure. Puis on revient en lisant soigneusement les exemples, et en approfondissant les définitions et les énoncés jusqu'à les comprendre. Enfin, dans une troisième lecture, on s'attache à décortiquer les preuves. Chacune de ces trois lectures se fait *un crayon et une feuille de papier à la main* pour refaire les calculs, réécrire les démonstrations, vérifier l'enchaînement des arguments.

Passons maintenant au contenu de l'UE. Trois thèmes bien distincts sont traités en quatre chapitres :

- L'usage des $\epsilon$ pour comprendre en profondeur la notion de limite et démontrer des résultats généraux fait l'objet du chapitre 1.
- Les chapitres 2 et 3 reprennent les grands résultats de l'analyse réelle en en détaillant toutes les démonstrations à l'aune du chapitre 1.
- Enfin, la théorie des séries de Fourier fait l'objet du chapitre 4.

On voit ainsi qu'il existe une coupure très nette entre les deux premières parties et la troisième, coupure qui ne porte pas seulement sur les sujets, mais surtout sur l'esprit selon lequel ils sont abordés. Si la théorie de Fourier peut être vue comme un chapitre supplémentaire de la théorie des séries de fonctions et se rattache naturellement au cours d'analyse 2, les deux premières parties sont une refondation du cours d'analyse de première année. On n'y trouvera pas vraiment d'énoncés nouveaux, mais plutôt un traitement complet et auto-suffisant avec preuves systématiques. En caricaturant un peu, la première année met en place des outils techniques et des résultats à appliquer que ce cours démontre en toute rigueur. On passe du statut d'usager des mathématiques (est-ce que ce résultat est vrai ?) à celui de mathématicien (pourquoi ce résultat est-il vrai ?).

Je termine par une petite bibliographie pour aller plus loin.

1) *« Mathématiques pour le DEUG : Analyse 1ère année » et « Analyse 2ème année »* (2 tomes séparés), F. Liret et D. Martinais, Dunod, 1998.

   Pas tout récent, mais a l'avantage d'être un ouvrage qui correspond vraiment à un cours qui a été donné, qui prend bien en compte les difficultés de compréhension souvent rencontrées par les étudiants. Contient également beaucoup d'exercices résolus en détails.

2) *« Analyse MP »* , J.M. Monier, Dunod, 2013.

   Bon bouquin de prépa qui met l'accent sur les méthodes avec des commentaires dans la marge, de nombreux exercices type classés par difficulté.

3) *« Mathématiques Tout-en-un pour la licence 1 » et « tout-en-un pour la licence 2 »* (2 tomes séparés), sous la direction de J.P. Ramis et A. Warusfel, 2018.

   Très complet et très bien construit, va bien au-delà du programme de L2 et peut vous accompagner pour la suite de vos études de mathématiques. Plus exigeant que les précédents.

Laurent Meersseman

# Chapitre 1

# Limites

## 1.1 Limite d'une fonction en un point $a$ de $\mathbb{R}$.

*Cadre général :* Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$. Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

**Définition 1.1.1.** On dit que $f$ a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$, et on écrit

$$\lim_a f = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \quad \left.\begin{array}{r} |x - a| \leq \alpha \\ x \in I \setminus \{a\} \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon$$

Autrement dit : *chaque fois qu'on se fixe une précision* $\epsilon > 0$, *on trouve une valeur* $\alpha$ *telle que, si* $x$ *est à une distance au plus* $\alpha$ *de* $a$, *alors* $f(x)$ *est à une distance au plus* $\epsilon$ *de* $\ell$.

Il est capital de comprendre que la dynamique de la phrase (chaque fois qu'on se fixe ... on trouve ...) est codée par les quantificateurs $\forall$ ..., $\exists$.

*Exemple.* La fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ vérifie $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. En effet, on a

$$\sin x \sim_0 x \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\sin x}{x} \sim_0 1$$

par un calcul direct d'équivalents.
Ici $a = 0$ et $\ell = 1$. Fixons $\epsilon = 1$. On a $f(3) = 0,047$ et on vérifie graphiquement (cf. figure 1.1) que

$$-3 \leq x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2$$

c'est-à-dire qu'une valeur convenable de $\alpha$ est 3. En effet,

$$|x| \leq \alpha = 3 \Rightarrow |f(x) - 1| \leq \epsilon = 1$$

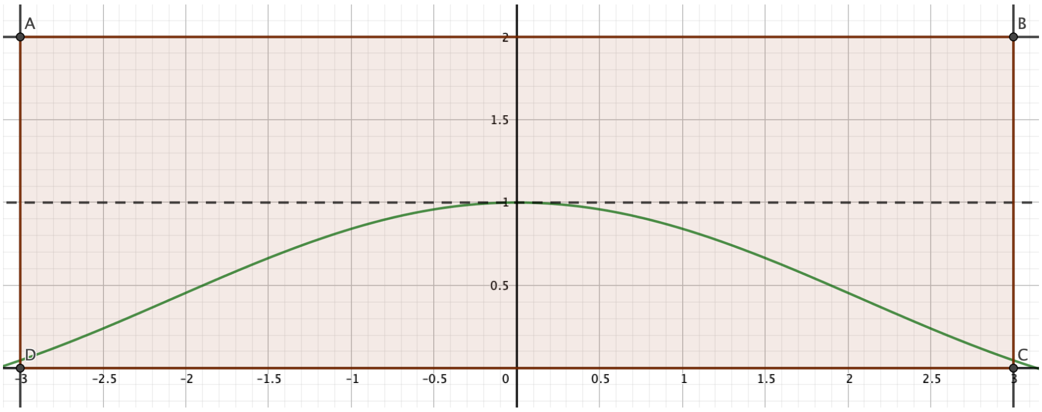


FIGURE 1.1 – $\lim_{0} \frac{\sin x}{x}$. Précision $\epsilon = 1$.

Fixons $\epsilon = 0,5$. On a $f(1,89) = 0,50237$ et on vérifie graphiquement (cf. figure 1.2) que

$$-1,89 \leq x \leq 1,89 \Rightarrow 0,5 \leq f(x) \leq 1,5$$

c'est-à-dire qu'une valeur convenable de $\alpha$ est $1,89$. En effet,

$$|x| \leq \alpha = 1,89 \Rightarrow |f(x) - 1| \leq \epsilon = 0,5$$

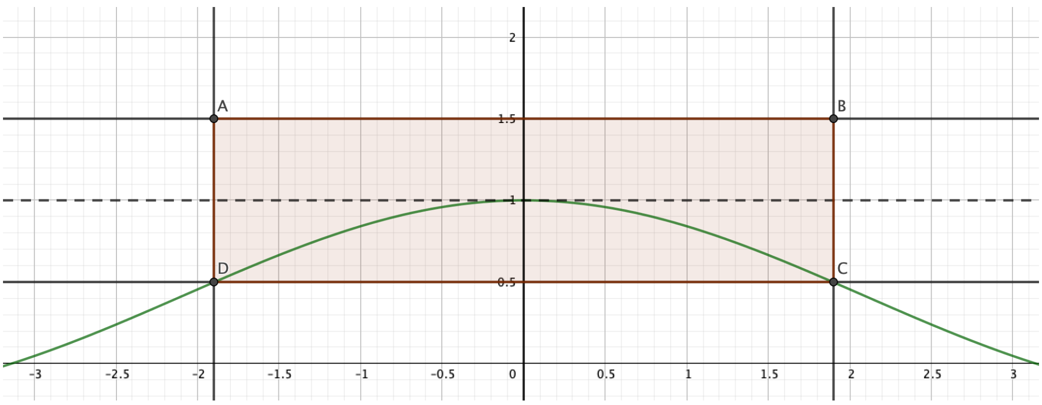


FIGURE 1.2 – $\lim_{0} \frac{\sin x}{x}$. Précision $\epsilon = 0,5$.

Fixons enfin $\epsilon = 0,1$. On a $f(0,78) = 0,901640$ et on vérifie graphiquement (cf. figure 1.3) que

$$-0,78 \leq x \leq 0,78 \Rightarrow 0,9 \leq f(x) \leq 1,1$$

c'est-à-dire qu'une valeur convenable de $\alpha$ est $0,78$. En effet,

$$|x| \leq \alpha = 0,78 \Rightarrow |f(x) - 1| \leq \epsilon = 0,1$$

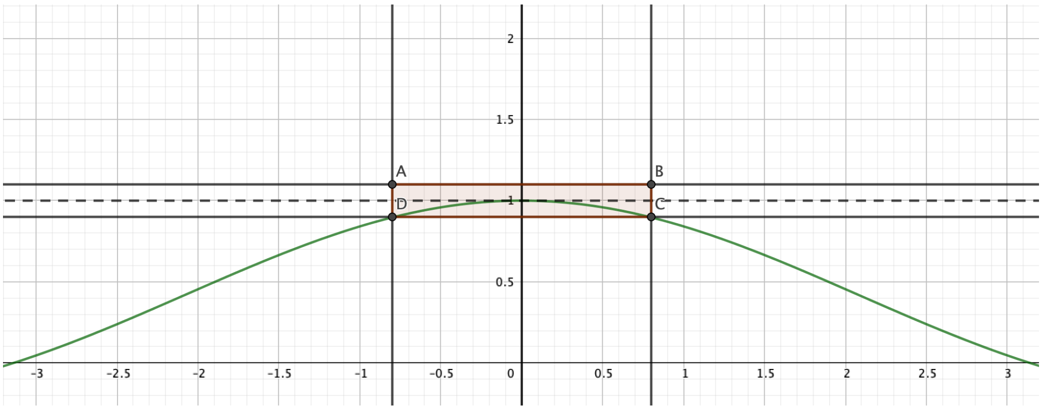


FIGURE 1.3 – $\lim_0 \dfrac{\sin x}{x}$. Précision $\epsilon = 0,1$.

*Remarques.* Notez les points suivants

i) La définition marche également si $f$ est définie sur $I$ tout entier et non pas seulement sur $I \setminus \{a\}$. Il est toutefois important de noter que *l'on n'utilise pas la valeur de $f$ en $a$ pour calculer la limite de $f$ en $a$*. On reviendra sur cette subtilité quand on parlera de continuité.

ii) La définition va à rebours de l'idée intuitive de limite : on fixe la précision $\epsilon$ qu'on veut obtenir au but, sur $f(x)$, et non à la source, sur $x$ ; la définition nous donne l'existence d'un intervalle centré en $a$ pour réaliser cette précision.

iii) $\alpha$ dépend de $\epsilon$.

La définition formelle n'est d'aucune utilité pour faire des calculs pratiques de limites. Elle sert à démontrer des résultats généraux sur les limites, résultats qui, eux, sont utiles pour le calcul pratique de limites.

Ainsi, montrons le théorème suivant.

**Théorème 1.1.1.** Soient $I$ et $J$ deux intervalles. On suppose que $I \cap J$ est un intervalle contenant le réel $a$. Soient $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ et $g : J \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Supposons $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = m$. Alors,

i) La somme $f+g$ a pour limite $\ell+m$ en $a$.

ii) Le produit $fg$ a pour limite $\ell m$ en $a$.

*Démonstration.* Traitons le i). Ecrivons les hypothèses

$$\forall \epsilon_1 > 0, \qquad \exists \alpha_1 > 0 \text{ tel que } \qquad |x-a| \leq \alpha_1 \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \epsilon_1 \tag{1.1}$$

et

$$\forall \epsilon_2 > 0, \qquad \exists \alpha_2 > 0 \text{ tel que } \qquad |x-a| \leq \alpha_2 \Rightarrow |g(x)-m| \leq \epsilon_2 \tag{1.2}$$

**Soit $\epsilon > 0$.**
Posons $\epsilon_1 = \epsilon/2$. Par (1.1) appliqué à $\epsilon_1 = \epsilon/2$, on obtient $\alpha_1 > 0$ tel que

$$|x-a| \leq \alpha_1 \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \epsilon/2 \tag{1.3}$$

De même, posons $\epsilon_2 = \epsilon/2$. Par (1.2) appliqué à $\epsilon_2 = \epsilon/2$, on obtient $\alpha_2 > 0$ tel que

$$|x-a| \leq \alpha_2 \Rightarrow |g(x)-m| \leq \epsilon/2 \tag{1.4}$$

**Posons finalement** $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$.
Par définition du minimum, on a $\alpha \leq \alpha_1$ et $\alpha \leq \alpha_2$.
Soit $x \in I \cap J \setminus \{a\}$. On suppose $|x-a| \leq \alpha$.
**Calculons**

$$\begin{aligned} |(f+g)(x)-(\ell+m)| &= |f(x)-\ell+g(x)-m| \\ &\leq |f(x)-\ell| + |g(x)-m| \quad \text{inégalité triangulaire} \\ &\leq \epsilon/2+\epsilon/2 \quad \text{par (1.3) et (1.4)} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on a donc réussi à trouver $\alpha > 0$ tel que

$$|x-a| \leq \alpha \Rightarrow |(f+g)(x)-(\ell+m)| \leq \epsilon$$

autrement dit, **on a bien montré que $f+g$ a pour limite $\ell+m$ en $a$.**

Démontrons la partie ii). Rappelons les hypothèses

$$\forall \epsilon_1 > 0, \qquad \exists \alpha_1 > 0 \text{ tel que } \qquad |x-a| \leq \alpha_1 \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \epsilon_1 \tag{1.5}$$

et

$$\forall \epsilon_2 > 0, \qquad \exists \alpha_2 > 0 \text{ tel que } \qquad |x-a| \leq \alpha_2 \Rightarrow |g(x)-m| \leq \epsilon_2 \tag{1.6}$$

**Soit $\epsilon > 0$.**
Posons $\epsilon_2 = \epsilon/(2|\ell| + 1)$. Par (1.6) appliqué à $\epsilon_2 = \epsilon/(2|\ell| + 1)$, on obtient $\alpha_2 > 0$ tel que

$$|x - a| \le \alpha_2 \Rightarrow |g(x) - m| \le \frac{\epsilon}{2|\ell| + 1} \tag{1.7}$$

Posons

$$A = \frac{\epsilon}{2|\ell| + 1} + |m| > 0$$

et observons qu'on a, pour $|x - a| \le \alpha_2$,

$$|g(x)| \le |g(x) - m| + |m| \le \frac{\epsilon}{2|\ell| + 1} + |m| = A \tag{1.8}$$

Posons $\epsilon_1 = \epsilon/2A$. Par (1.5) appliqué à $\epsilon_1 = \epsilon/2A$, on obtient $\alpha_1 > 0$ tel que

$$|x - a| \le \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| \le \epsilon/2A \tag{1.9}$$

**Posons finalement** $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$.
Par définition du minimum, on a $\alpha \le \alpha_1$ et $\alpha \le \alpha_2$.
Soit $x \in I \cap J \setminus \{a\}$. On suppose $|x - a| \le \alpha$.
**Calculons**

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - (\ell m)| &= |g(x)f(x) - g(x)\ell + \ell g(x) - \ell m| \\
&\le |g(x)(f(x) - \ell)| + |\ell(g(x) - m)| \quad \text{inégalité triangulaire} \\
&\le |g(x)||f(x) - \ell| + |\ell||g(x) - m)| \\
&\le |g(x)|\frac{\epsilon}{2A} + |\ell|\frac{\epsilon}{2|\ell| + 1} \quad \text{par (1.9) et (1.7)} \\
&\le |g(x)|\frac{\epsilon}{2A} + \epsilon/2 \\
&\le \epsilon/2 + \epsilon/2 \quad \text{par (1.8)} \\
&\le \epsilon
\end{aligned}$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on a donc réussi à trouver $\alpha > 0$ tel que

$$|x - a| \le \alpha \Rightarrow |(fg)(x) - (\ell m)| \le \epsilon$$

autrement dit, **on a bien montré que $fg$ a pour limite $\ell m$ en $a$.** □

On peut affiner la notion de limite d'une fonction en un point et parler de limites à gauche et à droite.

Soit $a$ un point intérieur de $I$, c'est-à-dire un point de $I$ qui n'est pas une extrémité de $I$.

*Exemples.*

i) 0 est un point intérieur de $\mathbb{R}$, de $[-1, 1]$, de $]-1/2, \infty[$.

ii) 0 n'est pas un point intérieur de $[0, 1]$, ni de $[0, \infty[$.

**Définition 1.1.2.** On dit que $f$ a pour limite à gauche $\ell \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$, et on écrit

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a,\ x<a} f(x) = \ell$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \qquad \text{tel que} \qquad \left.\begin{array}{l} |x-a| \le \alpha \\ x \in I \setminus \{a\} \ \text{ et } \ x < a \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - \ell| \le \epsilon$$

De même, on dit que $f$ a pour limite à droite $\ell \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$, et on écrit

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a,\ x>a} f(x) = \ell$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \qquad \text{tel que} \qquad \left.\begin{array}{l} |x-a| \le \alpha \\ x \in I \setminus \{a\} \ \text{ et } \ x > a \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - \ell| \le \epsilon$$

Une comparaison directe de cette définition avec celle de $f$ admet $\ell$ pour limite en $a$ va nous permettre de montrer la proposition suivante.

**Proposition 1.1.1.** La fonction $f$ a pour limite $\ell$ en $a$ si et seulement si $f$ a pour limite à gauche et à droite $\ell$ en $a$.

*Démonstration.* Supposons que $f$ ait pour limite à gauche et à droite $\ell$ en $a$.
Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} |x-a| \le \alpha_1 \\ x \in I \setminus \{a\} \ \text{ et } \ x < a \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - \ell| \le \epsilon \tag{1.10}$$

et il existe $\alpha_2 > 0$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} |x-a| \le \alpha_2 \\ x \in I \setminus \{a\} \ \text{ et } \ x > a \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - \ell| \le \epsilon \tag{1.11}$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Supposons $|x - a| \le \alpha$. Alors soit $x < a$ et il résulte immédiatement de (1.10) l'inégalité $|f(x) - \ell| \le \epsilon$. Soit $x > a$ et cette inégalité résulte de (1.11). Ainsi on a montré que $f$ a pour limite $\ell$ en $a$.

Inversement, supposons que $f$ ait pour limite $\ell$ en $a$.
Soit $\epsilon > 0$.
Alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\left.\begin{array}{l}|x-a| \leq \alpha \\ x \in I \setminus \{a\}\end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \epsilon$$

Posons $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Ceci implique (1.10) et (1.11). □

Toutefois, une fonction peut admettre des limites à droite et à gauche en $a$ *distinctes*, comme le montre l'exemple suivant.

*Exemple.* La fonction

$$x \in \mathbb{R}^* \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

représentée en figure 1.4 vérifie $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ mais $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

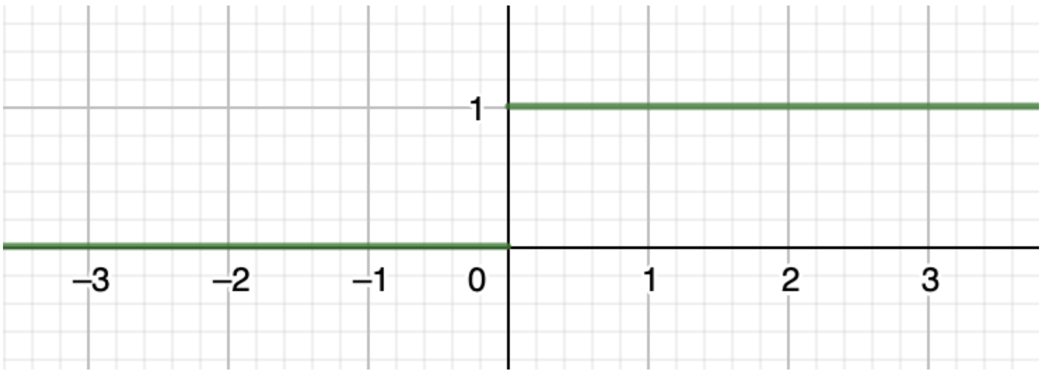


FIGURE 1.4 – Fonction 0 − 1.

Dans un tel cas, elle ne possède pas de limite d'après la proposition 1.1.1.

## 1.2 Limites infinies en $a$.

**Définition 1.2.1.** Soit $a \in I$ et soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ tend vers $+\infty$ en $a$, ou que $f$ a pour limite $+\infty$ en $a$, et on écrit

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_a f = +\infty$$

si

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0 \qquad \text{tel que} \qquad \left.\begin{array}{l} |x-a| \leq \alpha \\ x \in I \setminus \{a\} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq A$$

Autrement dit : *chaque fois qu'on se fixe une valeur $A > 0$, on trouve un réel positif $\alpha$ tel que, si $x$ est à une distance au plus $\alpha$ de $a$, alors $f(x)$ est plus grand que $A$.*
Pour bien comprendre la dynamique de la phrase, il faut avoir en tête qu'on prend des valeurs de $A$ de plus en plus grandes (qui vont vers $+\infty$) et qu'on obtient en retour des réels $\alpha$ de plus en petits.

On définit de même

**Définition 1.2.2.** Soit $a \in I$ et soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ tend vers $-\infty$ en $a$, ou que $f$ a pour limite $-\infty$ en $a$, et on écrit

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_a f = -\infty$$

si

$$\forall B < 0,\ \exists \alpha > 0 \qquad \text{tel que} \qquad \left.\begin{array}{l} |x-a| \leq \alpha \\ x \in I \setminus \{a\} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \leq B$$

Autrement dit : *chaque fois qu'on se fixe une valeur $B < 0$, on trouve un réel positif $\alpha$ tel que, si $x$ est à une distance au plus $\alpha$ de $a$, alors $f(x)$ est plus petit que $B$.* On prend des valeurs de $B$ de plus en plus négatives (qui vont vers $-\infty$) et on obtient en retour des réels $\alpha$ de plus en petits.

Remarquons qu'il existe aussi la notion de limite à gauche et à droite infinies, comme le montre l'exemple bien connu de la fonction inverse.

*Exemple.* Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Alors on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

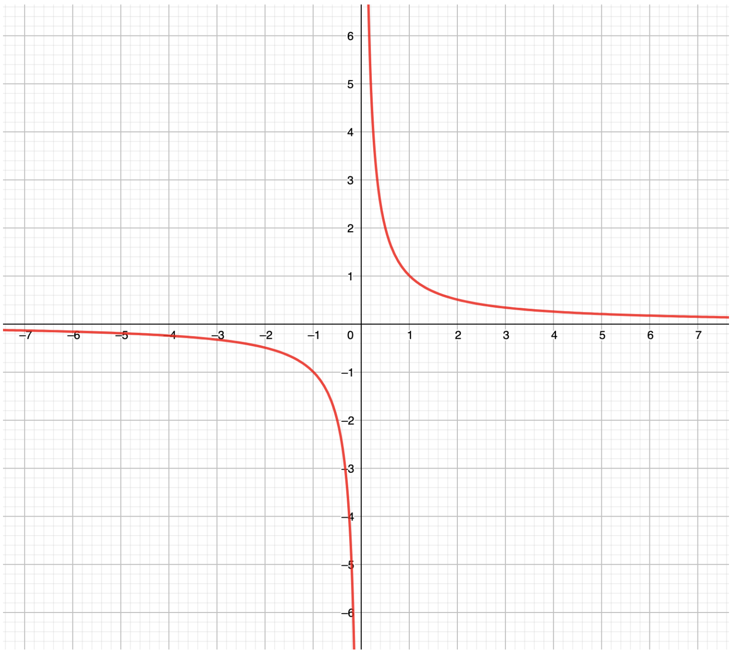


FIGURE 1.5 – Fonction inverse.

On peut généraliser le théorème 1.1.1 pour y inclure les limites infinies. Commençons par la somme.

**Théorème 1.2.1.** Soient $I$ et $J$ deux intervalles. On suppose que $I \cap J$ est un intervalle contenant le réel $a$. Soient $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ et $g : J \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Supposons $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = m$ où $\ell$ et $m$ sont des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Alors le comportement de la somme $f + g$ en $a$ est donné par le tableau suivant

| $f+g$ | $m \in \mathbb{R}$ | $m = +\infty$ | $m = -\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell \in \mathbb{R}$ | $\ell + m \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell = +\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | forme indéterminée |
| $\ell = -\infty$ | $-\infty$ | forme indéterminée | $-\infty$ |

Il faut lire ce tableau comme suit : si $\ell$ est un réel et $m = +\infty$, alors $f + g$ tend vers $+\infty$ en $a$.
Forme indéterminée signifie que le comportement de $f + g$ en $a$ dépend des fonctions $f$ et $g$. Il faut étudier au cas par cas pour décider si la limite est finie, infinie ou s'il n'y a pas de limite.

*Démonstration.*
• Le cas $\ell$ et $m$ réels est le théorème 1.1.1.

• Supposons $\ell$ réel et $m = +\infty$ et montrons que la limite de $f + g$ en $a$ est égale à $+\infty$.

Soit $A > 0$.
Comme $f$ tend vers $\ell$ en $a$, on peut trouver $\alpha_1 > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq 1$$

ce qui implique

$$|x - a| \leq \alpha_1 \Rightarrow \ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1 \tag{1.12}$$

Comme $g$ tend vers $+\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_2 > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \alpha_2 \Rightarrow g(x) \geq A + \max(0, 1 - \ell) \tag{1.13}$$

et observons que le membre de droite est strictement positif puisque $A$ l'est et que $\max(0, 1 - \ell)$ est supérieur ou égal à 0 par définition.
Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \cap J \setminus \{a\}$. Supposons $|x - a| \leq \alpha$. On a

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &\geq \ell - 1 + g(x) && \text{par (1.12)} \\ &\geq \ell - 1 + A + 1 - \ell && \text{par (1.13) et définition du max} \\ &\geq A\end{aligned}$$

• Supposons $\ell$ et $m$ égaux à $+\infty$ et montrons que la limite de $f + g$ en $a$ est égale à $+\infty$.

Soit $A > 0$.
Comme $f$ tend vers $+\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_1 > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \alpha_1 \Rightarrow f(x) \geq A/2 \tag{1.14}$$

De même, comme $g$ tend vers $+\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_2 > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \alpha_2 \Rightarrow g(x) \geq A/2 \tag{1.15}$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \cap J \setminus \{a\}$. Supposons $|x - a| \leq \alpha$. On a

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &\geq A/2 + A/2 && \text{par (1.14) et (1.15)} \\ &\geq A\end{aligned}$$

• Supposons $\ell$ réel et $m = -\infty$ et montrons que la limite de $f + g$ en $a$ est égale à $-\infty$.

Soit $B < 0$.
Comme $f$ tend vers $\ell$ en $a$, on peut trouver $\alpha_1 > 0$ tel que (1.12) soit vérifié.
Comme $g$ tend vers $-\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_2 > 0$ tel que

$$|x-a| \le \alpha_2 \Rightarrow g(x) \le B + \min(0, -1-\ell) \tag{1.16}$$

et observons que le membre de droite est strictement négatif puisque $B$ l'est et que $\min(0, -1-\ell)$ est inférieur ou égal à 0 par définition.
Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \cap J \setminus \{a\}$. Supposons $|x-a| \le \alpha$. On a

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
&\le \ell + 1 + g(x) && \text{par (1.12)} \\
&\le \ell + 1 + B - 1 - \ell && \text{par (1.16) et définition du min} \\
&\le B
\end{aligned}$$

• Supposons $\ell$ et $m$ égaux à $-\infty$ et montrons que la limite de $f+g$ en $a$ est égale à $-\infty$.

Soit $B < 0$.
Comme $f$ tend vers $-\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_1 > 0$ tel que

$$|x-a| \le \alpha_1 \Rightarrow f(x) \le B/2 \tag{1.17}$$

De même, comme $g$ tend vers $-\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_2 > 0$ tel que

$$|x-a| \le \alpha_2 \Rightarrow g(x) \le B/2 \tag{1.18}$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \cap J \setminus \{a\}$. Supposons $|x-a| \le \alpha$. On a

$$\begin{aligned}
|(f+g)(x)| &= f(x) + g(x) \\
&\le B/2 + B/2 && \text{par (1.17) et (1.18)} \\
&\le B
\end{aligned}$$

• Les autres cas s'obtiennent par symétrie, en intervertissant $f$ et $g$. □

**Théorème 1.2.2.** Soient $I$ et $J$ deux intervalles. On suppose que $I \cap J$ est un intervalle contenant le réel $a$. Soient $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ et $g : J \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Supposons $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = m$ où $\ell$ et $m$ sont des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Alors le comportement du produit $fg$ en $a$ est donné par le tableau suivant

| $fg$ | $m > 0$ | $m = 0$ | $m < 0$ | $m = +\infty$ | $m = -\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ell > 0$ | $\ell \cdot m > 0$ | $\ell \cdot m = 0$ | $\ell \cdot m < 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell = 0$ | $\ell \cdot m = 0$ | $\ell \cdot m = 0$ | $\ell \cdot m = 0$ | forme indéterminée | forme indéterminée |
| $\ell < 0$ | $\ell \cdot m < 0$ | $\ell \cdot m = 0$ | $\ell \cdot m > 0$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\ell = +\infty$ | $+\infty$ | forme indéterminée | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell = -\infty$ | $-\infty$ | forme indéterminée | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

*Démonstration.*
• Le cas $\ell$ et $m$ réels est donné par le théorème 1.1.1.

• Supposons $\ell > 0$ et $m = +\infty$ et montrons que la limite de $fg$ en $a$ est égale à $+\infty$.

Soit $A > 0$.
Comme $f$ tend vers $\ell$ en $a$, on peut trouver $\alpha_1 > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \ell/2$$

ce qui implique

$$|x - a| \leq \alpha_1 \Rightarrow \ell/2 \leq f(x) \leq 3\ell/2 \tag{1.19}$$

Comme $g$ tend vers $+\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_2 > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \alpha_2 \Rightarrow g(x) \geq 2A/\ell > 0 \tag{1.20}$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \cap J \setminus \{a\}$. Supposons $|x - a| \leq \alpha$. On a

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &= f(x)g(x) \\
&\geq \ell/2 \cdot g(x) && \text{en multipliant (1.19) par } g(x) > 0 \\
&\geq \ell/2 \cdot 2A/\ell && \text{en multipliant (1.20) par } \ell/2 > 0 \\
&\geq A
\end{aligned}$$

• Supposons $\ell$ et $m$ égaux à $+\infty$ et montrons que la limite de $fg$ en $a$ est égale à $+\infty$.

Soit $A > 0$.
Comme $f$ tend vers $+\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_1 > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \alpha_1 \Rightarrow f(x) \geq \sqrt{A} > 0 \tag{1.21}$$

De même, comme $g$ tend vers $+\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_2 > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \alpha_2 \Rightarrow g(x) \geq \sqrt{A} > 0 \tag{1.22}$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \cap J \setminus \{a\}$. Supposons $|x - a| \leq \alpha$. On a

$$\begin{aligned}
|(fg)(x)| &= f(x)g(x) \\
&\geq \sqrt{A} \cdot g(x) && \text{en multipliant (1.21) par } g(x) > 0 \\
&\geq \sqrt{A} \cdot \sqrt{A} && \text{en multipliant (1.22) par } \sqrt{A} > 0 \\
&\geq A
\end{aligned}$$

• Supposons $\ell > 0$ et $m = -\infty$ et montrons que la limite de $fg$ en $a$ est égale à $-\infty$.

Soit $B < 0$.
Comme $f$ tend vers $\ell$ en $a$, on peut trouver $\alpha_1 > 0$ tel que (1.19) soit vérifié.
Comme $g$ tend vers $-\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_2 > 0$ tel que

$$|x-a| \le \alpha_2 \Rightarrow g(x) \le 2B/\ell < 0 \tag{1.23}$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \cap J \setminus \{a\}$. Supposons $|x-a| \le \alpha$. On a

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &= f(x)g(x) \\
&\le \ell/2 \cdot g(x) \qquad \text{en multipliant (1.19) par } g(x) < 0 \\
&\le \ell/2 \cdot 2B/\ell \qquad \text{en multipliant (1.23) par } \ell/2 > 0 \\
&\le B
\end{aligned}$$

• Supposons $\ell$ et $m$ égaux à $-\infty$ et montrons que la limite de $fg$ en $a$ est égale à $+\infty$.

Soit $A > 0$.
Comme $f$ tend vers $-\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_1 > 0$ tel que

$$|x-a| \le \alpha_1 \Rightarrow f(x) \le -\sqrt{A} < 0 \tag{1.24}$$

De même, comme $g$ tend vers $-\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_2 > 0$ tel que

$$|x-a| \le \alpha_2 \Rightarrow g(x) \le -\sqrt{A} < 0 \tag{1.25}$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \cap J \setminus \{a\}$. Supposons $|x-a| \le \alpha$. On a

$$\begin{aligned}
|(fg)(x)| &= f(x)g(x) \\
&\ge -\sqrt{A} \cdot g(x) \qquad \text{en multipliant (1.24) par } g(x) < 0 \\
&\ge -\sqrt{A} \cdot (-\sqrt{A}) \qquad \text{en multipliant (1.25) par } -\sqrt{A} < 0 \\
&\ge A
\end{aligned}$$

• Supposons $\ell < 0$ et $m = +\infty$ et montrons que la limite de $fg$ en $a$ est égale à $-\infty$.

Soit $B < 0$.
Comme $f$ tend vers $\ell$ en $a$, on peut trouver $\alpha_1 > 0$ tel que

$$|x-a| \le \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| \le -\ell/2$$

ce qui implique

$$|x - a| \leq \alpha_1 \Rightarrow 3\ell/2 \leq f(x) \leq \ell/2 < 0 \tag{1.26}$$

Comme $g$ tend vers $+\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_2 > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \alpha_2 \Rightarrow g(x) \geq 2B/\ell > 0 \tag{1.27}$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \cap J \setminus \{a\}$. Supposons $|x - a| \leq \alpha$. On a

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &= f(x)g(x) \\
&\leq \ell/2 \cdot g(x) && \text{en multipliant (1.26) par } g(x) > 0 \\
&\leq \ell/2 \cdot 2B/\ell && \text{en multipliant (1.27) par } \ell/2 < 0 \\
&\leq B
\end{aligned}$$

• Supposons $\ell$ égal à $+\infty$ et $m$ égal à $-\infty$ et montrons que la limite de $fg$ en $a$ est égale à $-\infty$.

Soit $B < 0$.
Comme $f$ tend vers $+\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_1 > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \alpha_1 \Rightarrow f(x) \geq \sqrt{-B} > 0 \tag{1.28}$$

De même, comme $g$ tend vers $-\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_2 > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \alpha_2 \Rightarrow g(x) \leq -\sqrt{-B} < 0 \tag{1.29}$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \cap J \setminus \{a\}$. Supposons $|x - a| \leq \alpha$. On a

$$\begin{aligned}
|(fg)(x)| &= f(x)g(x) \\
&\leq \sqrt{-B} \cdot g(x) && \text{en multipliant (1.28) par } g(x) < 0 \\
&\leq \sqrt{-B} \cdot (-\sqrt{-B}) && \text{en multipliant (1.29) par } \sqrt{-B} > 0 \\
&\leq B
\end{aligned}$$

• Supposons $\ell < 0$ et $m = -\infty$ et montrons que la limite de $fg$ en $a$ est égale à $+\infty$.

Soit $A > 0$.
Comme $f$ tend vers $\ell$ en $a$, on peut trouver $\alpha_1 > 0$ tel que (1.26) soit vérifié.
Comme $g$ tend vers $-\infty$ en $a$, on peut trouver $\alpha_2 > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \alpha_2 \Rightarrow g(x) \leq 2A/\ell < 0 \tag{1.30}$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \cap J \setminus \{a\}$. Supposons $|x - a| \leq \alpha$. On a

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x)g(x) \\ &\geq \ell/2 \cdot g(x) && \text{en multipliant (1.26) par } g(x) < 0 \\ &\geq \ell/2 \cdot (2A/\ell) && \text{en multipliant (1.30) par } \ell/2 < 0 \\ &\geq A\end{aligned}$$

• Les autres cas s'obtiennent par symétrie, en intervertissant $f$ et $g$. □

## 1.3 Limites en l'infini.

Commençons par les limites en $+\infty$.

**Définition 1.3.1.** Soit $I$ un intervalle du type $]x_0, +\infty[$, $[x_0, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que $f$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, ou que la limite de $f$ en $+\infty$ vaut $\ell$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0 \qquad \text{tel que} \qquad x \in I,\ x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon$$

On écrit $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

**Définition 1.3.2.** Soit $I$ un intervalle du type $]x_0, +\infty[$, $[x_0, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que $f$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, ou que la limite de $f$ en $+\infty$ vaut $+\infty$ si

$$\forall A > 0,\ \exists A' > 0 \qquad \text{tel que} \qquad x \in I,\ x \geq A' \Rightarrow f(x) \geq A$$

On écrit $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**Définition 1.3.3.** Soit $I$ un intervalle du type $]x_0, +\infty[$, $[x_0, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que $f$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$, ou que la limite de $f$ en $+\infty$ vaut $-\infty$ si

$$\forall B < 0,\ \exists A > 0 \qquad \text{tel que} \qquad x \in I,\ x \geq A \Rightarrow f(x) \leq B$$

On écrit $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Définissons maintenant les limites en $-\infty$.

**Définition 1.3.4.** Soit $I$ un intervalle du type $]-\infty, x_0[$, $]-\infty, x_0]$ ou $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que $f$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$, ou que la limite de $f$ en $-\infty$ vaut $\ell$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists B < 0 \qquad \text{tel que} \qquad x \in I,\ x \leq B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon$$

On écrit $\lim_{-\infty} f = \ell$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

**Définition 1.3.5.** Soit $I$ un intervalle du type $]-\infty, x_0[$, $]-\infty, x_0]$ ou $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que $f$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$, ou que la limite de $f$ en $-\infty$ vaut $+\infty$ si

$$\forall A > 0,\ \exists B < 0 \qquad \text{tel que} \qquad x \in I,\ x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A$$

On écrit $\lim_{-\infty} f = +\infty$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

**Définition 1.3.6.** Soit $I$ un intervalle du type $]-\infty, x_0[$, $]-\infty, x_0]$ ou $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que $f$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$, ou que la limite de $f$ en $-\infty$ vaut $-\infty$ si

$$\forall B < 0,\ \exists B' < 0 \qquad \text{tel que} \qquad x \in I,\ x \leq B' \Rightarrow f(x) \leq B$$

On écrit $\lim_{-\infty} f = -\infty$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Les tableaux des théorèmes 1.2.1 et 1.2.2 restent valables lorsque les limites sont prises en $+\infty$ ; et lorsqu'elles sont prises en $-\infty$.

## 1.4 Limites de suite et limites de fonctions.

Rappelons d'abord les différentes définitions de limite de suite.

**Définition 1.4.1.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que

i) $(u_n)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ ou converge vers $\ell$, et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou plus simplement $\lim u_n = \ell$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \text{tel que} \qquad n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

ii) $(u_n)$ tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou plus simplement $\lim u_n = +\infty$ si

$$\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \text{tel que} \qquad n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A$$

iii) $(u_n)$ tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou plus simplement $\lim u_n = -\infty$ si

$$\forall B < 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \text{tel que} \qquad n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq B$$

On notera que ces définitions sont calquées sur celles de limites d'une fonction en $+\infty$, cf. définitions 1.3.1, 1.3.2 et 1.3.3. Cela n'a rien d'étonnant puisque une suite réelle n'est rien d'autre qu'une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
En particulier, cela entraîne que les opérations sur les limites de suites fonctionnent exactement comme les opérations sur les limites de fonctions. On peut donc utiliser tels quels les tableaux des théorèmes 1.2.1 et 1.2.2 pour décrire le comportement de $(u_n + v_n)$ et de $(u_n v_n)$ sous l'hypothèse $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = m$.

Plus intéressant, on peut utiliser les suites pour donner une caractérisation des limites de fonctions. On parle de caractérisation séquentielle des limites de fonctions.

**Théorème 1.4.1.** Soit $a \in I$ et soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Alors on a équivalence entre les deux énoncés suivants

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ pour $\ell \in \mathbb{R}$, ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

ii) Pour toute suite $(x_n)$ de $I \setminus \{a\}$ tendant vers $a$, la suite $(f(x_n))$ tend vers $\ell$.

*Démonstration.* Traitons le cas $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose d'abord i) et on veut montrer ii). Soit $(x_n)$ suite de $I \setminus \{a\}$ qui converge vers $a$.

Soit $\epsilon > 0$.

Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon \tag{1.31}$$

Comme $\lim x_n = a$, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq \alpha \tag{1.32}$$

Soit $n \geq n_0$. En combinant (1.32) et (1.31), il vient immédiatement $|f(x_n) - \ell| \leq \epsilon$. Le point ii) est démontré.

On veut maintenant montrer ii)$\Rightarrow$i). On va le faire par contraposée. On suppose donc que i) n'est pas vérifié et on va montrer que ii) n'est pas vérifié.
Autrement dit, on suppose que $f$ ne tend pas vers $\ell$ en $a$, c'est-à-dire

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in I \setminus \{a\} \quad \text{tel que} \quad |x - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - \ell| > \epsilon \tag{1.33}$$

Et on veut montrer qu'il existe une suite $(x_n)$ de $I \setminus \{a\}$ tendant vers $a$, telle que la suite $(f(x_n))$ ne tende pas vers $\ell$, c'est-à-dire

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N} \qquad \text{tel que} \qquad n \geq n_0 \quad \text{et} \quad |f(x_n) - \ell| > \epsilon \tag{1.34}$$

Par (1.33), on peut fixer $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall \alpha > 0,\ \exists x \in I \setminus \{a\} \qquad \text{tel que} \qquad |x - a| \leq \alpha \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| > \epsilon \tag{1.35}$$

Soit $n > 0$. En appliquant (1.35) à $\alpha = 1/n$, on obtient un réel, appelons-le $x_n$, tel que

$$|x_n - a| \leq \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad |f(x_n) - \ell| > \epsilon \tag{1.36}$$

On construit ainsi une suite $(x_n)$ [1].

**Lemme 1.4.1.** La suite $(x_n)$ converge vers $a$.

*Preuve du lemme.* On va utiliser l'inégalité de gauche de (1.36), qui est vérifiée pour tout $n > 0$. On va montrer ainsi à la fois que $(1/n)$ converge vers 0 et que $(x_n)$ converge vers $a$.

Soit $\epsilon > 0$.

On peut trouver un entier $n_0$ supérieur ou égal à $1/\epsilon$, par exemple on prend pour $n_0$ la partie entière de $1/\epsilon$ plus 1.

Soit $n \geq n_0$. On a, en passant à l'inverse,

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon$$

En ajoutant l'inégalité de (1.36), on obtient

$$|x_n - a| \leq \frac{1}{n} \leq \epsilon$$

On a donc bien montré que la limite de $(1/n)$ est zéro et celle de $(x_n)$ est $a$. □

Ainsi nous avons trouvé une suite $(x_n)$ qui tend vers $a$. De plus, d'après (1.36), on a

$$\forall n > 0, \qquad |f(x_n) - \ell| > \epsilon \tag{1.37}$$

Mais (1.37) implique que la suite $(x_n)$ vérifie (1.34) - prendre $n = n_0$ dans (1.34) - c'est-à-dire que ii) n'est pas vérifié. Par contraposée, on a donc bien prouvé que ii) implique i).

Les cas $\ell = +\infty$ et $\ell = -\infty$ se traitent de façon similaire. □

1. Telle qu'elle est construite, la suite $(x_n)$ n'est définie que pour $n > 0$. On peut l'étendre à $n = 0$ en posant par exemple $u_0 = 0$.

Cette caractérisation n'est pas très facile à utiliser directement pour montrer qu'une fonction admet une limite $\ell$ en un point $a$. Elle est par contre très utile pour montrer qu'*une fonction ne tend pas vers $\ell$ en $a$*. Pour cela on se sert des corollaires suivants.

**Corollaire 1.4.1.** Soit $a \in I$ et soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Alors on a équivalence entre les deux énoncés suivants

i) La fonction $f$ ne tend pas vers $\ell$ en $a$, où $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

ii) Il existe une suite $(x_n)$ de $I \setminus \{a\}$ tendant vers $a$ telle que la suite $(f(x_n))$ ne tende pas vers $\ell$.

*Démonstration.* L'équivalence entre i) et ii) est simplement la négation du théorème 1.4.1. □

Dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, on peut raffiner ce corollaire.

**Corollaire 1.4.2.** Soit $a \in I$ et soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Alors on a équivalence entre les deux énoncés suivants

i) La fonction $f$ ne tend pas vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $a$.

ii) Il existe une suite $(x_n)$ de $I \setminus \{a\}$ tendant vers $a$ et un réel $\epsilon > 0$ tels que

$$\forall n > 0, \qquad |x_n - a| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - \ell| > \epsilon$$

*Démonstration.* i)$\Rightarrow$ ii) est exactement le raisonnement par contraposée fait dans la preuve du théorème 1.4.1. Enfin, ii) implique immédiatement le ii) du corollaire 1.4.1 en utilisant le lemme 1.4.1. □

Pour finir, notons qu'on montrerait de même

**Théorème 1.4.2.** Soit $I$ un intervalle du type $]x_0, +\infty[$, $[x_0, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors on a équivalence entre les deux énoncés suivants

i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ pour $\ell \in \mathbb{R}$, ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

ii) Pour toute suite $(x_n)$ de $I$ tendant vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))$ tend vers $\ell$.

et

**Théorème 1.4.3.** Soit $I$ un intervalle du type $]-\infty, x_0[$, $]-\infty, x_0]$ ou $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors on a équivalence entre les deux énoncés suivants

i) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ pour $\ell \in \mathbb{R}$, ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

ii) Pour toute suite $(x_n)$ de $I$ tendant vers $-\infty$, la suite $(f(x_n))$ tend vers $\ell$.

# Chapitre 2

# Grands théorèmes de l'analyse : suites réelles

## 2.1 Bornes supérieures et inférieures de suites.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On rappelle que

i) $(u_n)$ est majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$$

$M$ est appelé majorant de $(u_n)$.

ii) $(u_n)$ est minorée si

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$$

$m$ est appelé minorant de $(u_n)$.

iii) $(u_n)$ est bornée si elle est minorée et majorée.

On a le lemme immédiat suivant.

**Lemme 2.1.1.** $(u_n)$ est bornée si et seulement

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq C \tag{2.1}$$

*Démonstration.* Supposons $(u_n)$ bornée. Soient $m$ un minorant et $M$ un majorant de $(u_n)$. Posons $C = \max(|m|, |M|)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} m \leq\, & u_n \leq M \\ -|m| \leq m \leq\, & u_n \leq M \leq |M| \\ -C \leq -|m| \leq m \leq\, & u_n \leq M \leq |M| \leq C \\ & |u_n| \leq C \end{aligned}$$

et la suite $(u_n)$ vérifie (2.1).

Réciproquement, si $(u_n)$ vérifie (2.1), il suffit de poser $m = -C$ et $M = C$ pour obtenir un minorant et un majorant de $(u_n)$. □

Remarquons qu'un majorant, respectivement un minorant, n'est pas unique : si $M$ majore $(u_n)$, respectivement $m$ minore $(u_n)$, pour tout $\epsilon > 0$, $M + \epsilon$ majore, respectivement $m - \epsilon$ minore également $(u_n)$.
Ceci conduit à la définition suivante

**Définition 2.1.1.**

i) Soit $(u_n)$ une suite majorée. On appelle *borne supérieure* de $(u_n)$ le plus petit des majorants de $(u_n)$. On la note $\sup(u_n)$ ou $\sup\limits_{n\geq 0} u_n$.

ii) Soit $(u_n)$ une suite minorée. On appelle *borne inférieure* de $(u_n)$ le plus grand des minorants de $(u_n)$. On la note $\inf(u_n)$ ou $\inf\limits_{n\geq 0} u_n$.

On admettra que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure, c'est-à-dire que toute suite majorée admet une borne supérieure. Ceci entraîne que toute suite minorée admet une borne inférieure grâce au lemme suivant (cf. exercice 5.2.5).

**Lemme 2.1.2.** Soit $(u_n)$ une suite réelle minorée. Alors la suite $(-u_n)$ est majorée et on a $\inf(u_n) = -\sup(-u_n)$.

*Remarque.* La notion de borne supérieure et la propriété de la borne supérieure s'appliquent dans le cadre plus général suivant. Soit $E$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si $E$ est majorée, i.e. s'il existe $M$ tel que tout élément de $E$ est inférieur ou égal à $M$, alors la propriété de la borne supérieure implique que $E$ possède une borne supérieure, i.e. un plus petit majorant. De même, si $E$ est minorée, elle possède une borne inférieure.

On retrouve la définition 2.1.1 en prenant pour $E$ l'ensemble des valeurs de la suite $(u_n)$.

*Exemple.* La suite $(u_n = 1/n)_{n>0}$ est majorée par 1 et minorée par 0. Soit $\epsilon > 0$. Alors $1 - \epsilon$ n'est pas un majorant de $(u_n)$ car $u_1 > 1 - \epsilon$. Et $\epsilon$ n'est pas un minorant de $(u_n)$ car la limite de $(u_n)$ est zéro, donc on peut trouver $n_0$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 < u_n < \epsilon$$

On en déduit $\sup(u_n) = 1$ et $\inf(u_n) = 0$. On notera que $\sup(u_n) = u_1$ (on dit que la borne supérieure est atteinte), mais que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > \inf(u_n)$.

Soit $(u_n)$ une suite majorée. Posons $M = \sup(u_n)$. Mathématiquement, $M$ est caractérisée par les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, &\qquad u_n \leq M \\ \forall M' \text{ majorant de } (u_n), &\qquad M \leq M' \end{aligned} \tag{2.2}$$

On en déduit le résultat suivant

**Proposition 2.1.1. Caractérisation de la borne supérieure.** Soit $(u_n)$ une suite majorée. Alors $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de $(u_n)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq M \\ &\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \text{tel que } M - \epsilon < u_{n_0} \leq M \end{aligned} \tag{2.3}$$

*Démonstration.* Soit $M = \sup(u_n)$. Alors $M$ vérifie (2.2).
Soit $\epsilon > 0$. On a $M - \epsilon < M$, donc par la contraposée de la deuxième ligne de (2.2), on déduit que $M - \epsilon$ n'est pas un majorant de $(u_n)$. On peut donc trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > M - \epsilon$.
Par ailleurs, par définition de la borne supérieure $M$ est un majorant de $(u_n)$. On a donc $M - \epsilon < u_{n_0} \leq M$ et (2.3) est vérifiée.

Réciproquement, supposons que $M$ vérifie (2.3). Alors c'est un majorant de $(u_n)$. De plus, soit $M'$ un (autre) majorant de $(u_n)$. Supposons par l'absurde $M' < M$. Posons $\epsilon = M - M' > 0$ de sorte qu'on ait $M' = M - \epsilon$. Par (2.3), on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M - \epsilon < u_{n_0} \leq M$, c'est-à-dire $M' < u_{n_0} \leq M$. Mais alors $M'$ n'est pas un majorant de $(u_n)$. Contradiction. On conclut que $M' \geq M$ et donc que $M$ vérifie (2.2). C'est donc bien la borne supérieure de $(u_n)$ □

Il y a bien entendu une version borne inférieure.

**Proposition 2.1.2. Caractérisation de la borne inférieure.** Soit $(u_n)$ une suite minorée. Alors $m \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de $(u_n)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq m \\ &\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \text{tel que } m \leq u_{n_0} < m + \epsilon \end{aligned} \tag{2.4}$$

*Démonstration.* Soit $(u_n)$ une suite minorée et soit $m$ sa borne inférieure. Par le lemme 2.1.2, la suite $(-u_n)$ est majorée et $-m$ est la borne supérieure de $(-u_n)$. Par la proposition 2.1.1, dire que $-m$ est la borne supérieure de $(-u_n)$ est équivalent à dire que

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \qquad -u_n \leq -m \\ &\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \text{tel que } -m - \epsilon < -u_{n_0} \leq -m \end{aligned} \tag{2.5}$$

En multipliant (2.5) par $-1$, on obtient (2.4) et la proposition est démontrée. □

## 2.2 Suites monotones.

Rappelons qu'une suite réelle $(u_n)$ est croissante si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}, \qquad p \geq n \Rightarrow u_p \geq u_n$$

Et elle est décroissante si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}, \qquad p \geq n \Rightarrow u_p \leq u_n$$

Enfin, une suite est monotone si elle croissante ou décroissante.

Nous pouvons énoncer et démontrer le résultat fondamental suivant.

**Théorème 2.2.1.** Soit $(u_n)$ une suite croissante.

i) Supposons $(u_n)$ majorée. Alors $(u_n)$ converge vers sa borne supérieure.

ii) Supposons $(u_n)$ non majorée. Alors $\lim u_n = +\infty$.

*Démonstration.* Soit $(u_n)$ une suite croissante.

Supposons tout d'abord $(u_n)$ majorée. Soit $M$ sa borne supérieure. On veut montrer $\lim u_n = M$.
Soit $\epsilon > 0$. Par la proposition 2.1.1, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M - \epsilon < u_{n_0} \leq M$.
Soit $n \geq n_0$. Par croissance de $(u_n)$, on a

$$M - \epsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq M \tag{2.6}$$

l'inégalité la plus à droite résultant du fait que $M$ est un majorant de la suite $(u_n)$.
Mais (2.6) entraîne

$$|u_n - M| \leq \epsilon$$

et on a bien montré $\lim u_n = M$.

Supposons maintenant $(u_n)$ non majorée et montrons $\lim u_n = +\infty$.
Soit $A > 0$. Comme $A$ n'est pas un majorant de $(u_n)$, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$.
Soit $n \geq n_0$. Par croissance de $(u_n)$, on a

$$u_n \geq u_{n_0} > A$$

d'où en particulier $u_n \geq A$. Ceci prouve bien que $\lim u_n = +\infty$. □

On a de même, pour les suites décroissantes, le

**Corollaire 2.2.1.** Soit $(u_n)$ une suite décroissante.

i) Supposons $(u_n)$ minorée. Alors $(u_n)$ converge vers sa borne inférieure.

ii) Supposons $(u_n)$ non minorée. Alors $\lim u_n = -\infty$.

*Démonstration.* Soit $(u_n)$ décroissante. Alors la suite $(-u_n)$ est croissante.
Si $(u_n)$ est minorée de borne inférieure $m$, le lemme 2.1.2 implique que $(-u_n)$ est majorée de borne supérieure $-m$. Une application du théorème 2.2.1, point i), montre que $(-u_n)$ converge vers $-m$. Mais alors $(u_n)$ converge vers $m$, puisque le produit de $(u_n)$ avec la suite constante égale à $-1$ converge vers le produit de la limite de $(u_n)$ et de $-1$ (opération sur les limites).
Si $(u_n)$ n'est pas minorée, la suite $(-u_n)$ n'est pas majorée et une application du théorème 2.2.1, point ii), montre cette fois que $\lim -u_n = +\infty$. Le théorème des opérations sur les limites appliqué au produit de $(u_n)$ avec la suite constante égale à $-1$ implique $\lim u_n = -\infty$. □

**Définition 2.2.1.** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont *adjacentes* si

i) $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ décroissante.

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$.

iii) $\lim u_n - v_n = 0$.

Comme corollaire du théorème 2.2.1, on obtient

**Corollaire 2.2.2.** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites adjacentes. Alors elles convergent vers la même limite finie $\ell$. On a de plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_0 \leq u_n \leq \ell \leq v_n \leq v_0 \tag{2.7}$$

*Démonstration.* Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites adjacentes. Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0 \tag{2.8}$$

On en déduit que $(u_n)$ est majorée par $v_0$ et $(v_n)$ minorée par $u_0$. Ainsi $(u_n)$ est croissante majorée, donc converge vers sa borne supérieure. De même, $(v_n)$ est décroissante minorée donc converge vers sa borne inférieure. Par opération sur les limites, la suite $(u_n - v_n)$ converge vers la différence de ces deux bornes. Mais par définition, la limite de $(u_n - v_n)$ est zéro. Donc, par unicité de la limite (cf. exercice 5.1.14), la borne supérieure de $(u_n)$ est égale à la borne inférieure de $(v_n)$ et les deux suites convergent vers la même limite finie $\ell$. Enfin (2.7) s'obtient immédiatement de (2.8) et du fait que $\ell$ est à la fois un majorant de $(u_n)$ et un minorant de $(v_n)$. □

## 2.3 Sous-suites et théorème de Bolzano-Weierstrass.

**Définition 2.3.1.** Soit $(u_n)$ une suite réelle. Une suite $(u_{\phi(n)})$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, est appelée *sous-suite* de $(u_n)$ ou *suite extraite* de $(u_n)$.

Les termes de la sous-suite $(u_{\phi(n)})$ sont extraits des termes de la suite $(u_n)$, d'où le nom.

*Exemples.*

i) $(u_{2n})$ est la sous-suite des termes pairs de $(u_n)$. Elle ne contient que les termes d'indice pair et correspond à la fonction $\phi(n) = 2n$.

ii) $(u_{2n+1})$ est la sous-suite des termes impairs de $(u_n)$. Elle ne contient que les termes d'indice impair et correspond à la fonction $\phi(n) = 2n + 1$.

iii) La suite
$$v_n = \begin{cases} u_0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
n'est pas une sous-suite de $(u_n)$. En effet, on peut certes l'écrire sous la forme $(u_{\phi(n)})$. Mais alors la fonction $\phi$ vaut 0 sur les nombres pairs et 1 sur les nombres impairs. Elle n'est donc pas strictement croissante.

On construit souvent une sous-suite étape par étape, sans donner de formule. Par exemple, soit $(u_n)$ une suite à valeurs positives convergeant vers 0.
Fixons $\epsilon = 1$. Par convergence, on peut trouver $n_0 \geq 0$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow 0 < u_n < 1$. On pose $\phi(0) = n_0$.
Fixons $\epsilon = 1/2$. Par convergence, on peut trouver $n_1 > n_0$ tel que $n \geq n_1 \Rightarrow 0 < u_n < 1/2$. On pose $\phi(1) = n_1$.
Fixons $\epsilon = 1/4$. Par convergence, on peut trouver $n_2 > n_1$ tel que $n \geq n_2 \Rightarrow 0 < u_n < 1/4$. On pose $\phi(2) = n_2$.
$\vdots$
Fixons $\epsilon = 1/2^p$. Par convergence, on peut trouver $n_p > n_{p-1}$ tel que $n \geq n_p \Rightarrow 0 < u_n < 1/2^p$. On pose $\phi(p) = n_p$.

On construit ainsi par récurrence une sous-suite $(v_n) = (u_{\phi(n)})$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < v_n < 1/2^n$$
donc une sous-suite qui converge vers 0 mais avec un contrôle sur la rapidité de convergence. Par exemple la série $\sum v_n$ converge (comparer avec la série géométrique de raison 1/2) alors qu'on n'a aucune idée si la série $\sum u_n$ converge.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.3.1.** Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \phi(n) \geq n$$

*Démonstration.* Nous allons raisonner par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, appelons $H_n$ l'hypothèse $\phi(n) \geq n$.
Initialisation : on a $\phi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\phi(0) \geq 0$. L'hypothèse $H_0$ est vérifiée.
Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons vérifiée l'hypothèse $H_p$ et montrons $H_{p+1}$.
On calcule

$$\phi(p+1) > \phi(p) \qquad \text{par stricte croissance de } \phi$$
$$\phi(p+1) > p \qquad \text{par } H_p$$
$$\phi(p+1) \geq p+1 \qquad \text{car } \phi(p+1) \in \mathbb{N}$$

ce qui montre $H_{p+1}$.
Par récurrence, on a bien montré

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \phi(n) \geq n$$

□

Nous pouvons énoncer

**Proposition 2.3.1.** Soit $(u_n)$ une suite réelle. Alors il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes

i) $\lim u_n = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

ii) Pour toute sous-suite $(u_{\phi(n)})$ de $(u_n)$, on a $\lim u_{\phi(n)} = \ell$.

*Démonstration.* Supposons $\lim u_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.
Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
Soit $\epsilon > 0$. On peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

Soit $n \geq n_0$. Le lemme 2.3.1 implique $\phi(n) \geq n_0$. On peut donc remplacer $n$ par $\phi(n)$ dans l'inégalité de droite ci-dessus et on a $|u_{\phi(n)} - \ell| \leq \epsilon$. Ainsi pour toute sous-suite $(u_{\phi(n)})$ de $(u_n)$, on a $\lim u_{\phi(n)} = \ell$.

Supposons $\lim u_n = +\infty$.
Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
Soit $A > 0$. On peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A$$

Soit $n \geq n_0$. Le lemme 2.3.1 implique $\phi(n) \geq n_0$. On peut donc remplacer $n$ par $\phi(n)$ dans l'inégalité de droite ci-dessus et on a $u_{\phi(n)} \geq A$. Ainsi pour toute sous-suite $(u_{\phi(n)})$ de $(u_n)$, on a $\lim u_{\phi(n)} = +\infty$.

Supposons enfin $\lim u_n = -\infty$.
Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
Soit $B < 0$. On peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq B$$

Soit $n \geq n_0$. Le lemme 2.3.1 implique $\phi(n) \geq n_0$. On peut donc remplacer $n$ par $\phi(n)$ dans l'inégalité de droite ci-dessus et on a $u_{\phi(n)} \leq B$. Ainsi pour toute sous-suite $(u_{\phi(n)})$ de $(u_n)$, on a $\lim u_{\phi(n)} = -\infty$.

Réciproquement, supposons que, pour toute sous-suite $(u_{\phi(n)})$ de $(u_n)$, on ait $\lim u_{\phi(n)} = \ell$.
Il suffit de considérer $\phi = Id$ et on obtient $\lim u_n = \ell$. □

Cette proposition n'est pas très utile *en pratique*; mais le corollaire suivant l'est.

**Corollaire 2.3.1.** Soit $(u_n)$ une suite réelle. Supposons que deux sous-suites de $(u_n)$ aient des limites distinctes. Alors $(u_n)$ n'a pas de limite.

*Démonstration.* Supposons que deux sous-suites de $(u_n)$ aient des limites distinctes. Si $(u_n)$ a une limite $\ell$, les deux sous-suites en question convergent vers $\ell$ par la proposition 2.3.1. Contradiction. La suite $(u_n)$ n'a pas de limite. □

*Exemple.* La suite $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ a pour sous-suite des termes pairs la suite constante égale à un et pour sous-suite des termes impairs la suite constante égale à $-1$. Comme ces deux sous-suites convergent vers des limites distinctes, on en déduit par le corollaire 2.3.1 que $(u_n)$ n'admet pas de limite.

Le comportement de l'exemple précédent est typique des suites bornées. On a

**Théorème 2.3.1. (Bolzano-Weierstrass).** Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée. Alors $(u_n)$ admet une sous-suite convergente.

Notons que ce résultat n'est pas très utile *en pratique* car bien souvent, on ne connaît pas précisément de sous-suite convergente.
Il est par contre capital pour démontrer les grands théorèmes de l'analyse.

*Démonstration.* Soit $(u_n)$ une suite bornée. Elle est donc à valeurs dans un intervalle fermé borné, disons $[a, b]$.

On va construire une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ convergente étape par étape. La stratégie est la suivante. On construit par récurrence deux suites adjacentes $(a_n)$ et $(b_n)$ avec la propriété : pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une infinité de termes de la suite $(u_n)$ dans l'intervalle $[a_p, b_p]$. On construit $\phi$ strictement croissante telle que $u_{\phi(p)}$ soit dans $[a_p, b_p]$. Les deux suites adjacentes convergent vers la même limite par le corollaire 2.2.2 ; et la sous-suite $(u_{\phi(n)})$ converge car elle est "coincée" entre les suites $(a_n)$ et $(b_n)$. Cela découle du classique théorème 2.3.2.
La construction des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ se fait par dichotomie. On commence en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On coupe l'intervalle $[a_0, b_0]$ en deux et on choisit un sous-intervalle contenant une infinité de termes de la suite $(u_n)$ (il y en a toujours au moins un sur les deux). On note $a_1$ et $b_1$ les extrémités de ce sous-intervalle. Puis on recommence.

<u>Etape 0 : initialisation</u>

On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On pose $\phi(0) = 0$. Posons enfin $E_0 = \mathbb{N}$. On observe qu'on a

$$\forall n \in E_0, \qquad a_0 \leq u_n \leq b_0 \tag{2.9}$$

<u>Etape 1</u>

On considère $(a_0+b_0)/2$. S'il y a une infinité de termes de $(u_n)$ dans l'intervalle $[a_0, (a_0 + b_0)/2]$, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = (a_0 + b_0)/2$.
S'il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite dans l'intervalle $[a_0, (a_0+b_0)/2]$, alors il y en a forcément un nombre infini dans l'intervalle $[(a_0 + b_0)/2, b_0]$. On pose cette fois $a_1 = (a_0 + b_0)/2$ et $b_1 = b_0$.
Dans tous les cas, on définit l'ensemble infini

$$E_1 = \{n > \phi(0) \mid u_n \in [a_1, b_1]\} \tag{2.10}$$

et $\phi(1) = \min E_1$. Remarquons que $E_1$ est un ensemble non vide minoré donc possède une borne inférieure. Mais comme $E_1$ n'est composé que d'entiers, la borne inférieure est atteinte d'où l'écriture min plutôt que inf.
On observe qu'on a

$$\begin{cases} \forall n \in E_1, \qquad a_0 \leq a_1 \leq u_n \leq b_1 \leq b_0 \\ b_1 - a_1 = \dfrac{b_0 - a_0}{2} \end{cases} \tag{2.11}$$

<u>Etape $p$ : hérédité</u>

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose construits

$$a_0 \leq \ldots \leq a_{p-1} < b_{p-1} \leq \ldots \leq b_0 \tag{2.12}$$

et

$$\phi(0) < \ldots < \phi(p-1) \tag{2.13}$$

ainsi que

$$E_{p-1} \subset \ldots \subset E_0 \tag{2.14}$$

des ensembles infinis vérifiant

$$\forall 0 \leq k \leq p-1, \qquad \begin{cases} \forall n \in E_k, & a_k \leq u_n \leq b_k \\ b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k} \end{cases} \tag{2.15}$$

On considère $(a_{p-1}+b_{p-1})/2$. S'il y a une infinité d'entiers $n \in E_{p-1}$ tels que $u_n$ soit dans l'intervalle $[a_{p-1}, (a_{p-1}+b_{p-1})/2]$, on pose $a_p = a_{p-1}$ et $b_p = (a_{p-1}+b_{p-1})/2$. S'il n'y en a qu'un nombre fini, alors il y a forcément un nombre infini d'entiers $n \in E_{p-1}$ tels que $u_n$ soit dans l'intervalle $[(a_{p-1}+b_{p-1})/2, b_{p-1}]$. On pose cette fois $a_p = (a_{p-1}+b_{p-1})/2$ et $b_p = b_{p-1}$.
Dans tous les cas, on définit l'ensemble infini d'entiers

$$E_p = \{n > \phi(p-1) \mid u_n \in [a_p, b_p]\} \tag{2.16}$$

et $\phi(p) = \min E_p$.
On observe qu'on a

$$a_0 \leq \ldots \leq a_p < b_p \leq \ldots \leq b_0 \tag{2.17}$$

et

$$\phi(0) < \ldots < \phi(p) \tag{2.18}$$

ainsi que

$$E_p \subset \ldots \subset E_0 \tag{2.19}$$

des ensembles infinis vérifiant

$$\forall 0 \leq k \leq p, \qquad \begin{cases} \forall n \in E_k, & a_k \leq u_n \leq b_k \\ b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k} \end{cases} \tag{2.20}$$

Par récurrence, on construit ainsi deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ vérifiant

i) $(a_n)$ est croissante et $(b_n)$ décroissante par (2.17).

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$ toujours par (2.17).

iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n - b_n| = |a_0 - b_0|/2^n$ par (2.20). Comme $\lim 1/2^n = 0$, on en déduit $\lim a_n - b_n = 0$.

Autrement dit, les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes. On conclut du corollaire 2.2.2 qu'elles convergent vers une même limite $\ell$.
Mais il résulte de (2.20) et de la relation $\phi(n) \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ les inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \leq u_{\phi(n)} \leq b_n \tag{2.21}$$

qui entraîne, en vertu du théorème 2.3.2 démontré ci-dessous la convergence de la sous-suite $(u_{\phi(n)})$ vers $\ell$. □

La preuve de Bolzano-Weierstrass utilise le résultat classique suivant

**Théorème 2.3.2.** Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites convergentes vers le même réel $\ell$. Soit $(v_n)$ une troisième suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \leq v_n \leq b_n \tag{2.22}$$

Alors $(v_n)$ converge et sa limite est $\ell$.

*Démonstration.* Sous les hypothèses du théorème, montrons que $\lim v_n = \ell$.
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim a_n = \ell$, on peut trouver $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_1 \Rightarrow \ell - \epsilon \leq a_n \leq \ell + \epsilon \tag{2.23}$$

Comme $\lim b_n = \ell$, on peut trouver $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_2 \Rightarrow \ell - \epsilon \leq b_n \leq \ell + \epsilon \tag{2.24}$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Soit $n \geq n_0$. Il résulte de (2.22), (2.23) et (2.24) qu'on a

$$\ell - \epsilon \leq a_n \leq v_n \leq b_n \leq \ell + \epsilon$$

d'où $|v_n - \ell| \leq \epsilon$. Ceci montre bien $\lim v_n = \ell$. □

## 2.4 Suites de Cauchy et complétude de ℝ.

La définition de suite convergente fait intervenir la valeur de la limite $\ell$. On mesure l'écart entre les termes de la suite et $\ell$. Il existe une notion un peu différente où l'on mesure l'écart des termes d'une suite entre eux : la notion de suite de Cauchy.

**Définition 2.4.1.** Soit $(u_n)$ une suite réelle. On dit que $(u_n)$ est une *suite de Cauchy* si

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \qquad \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq n_0,\ \text{on a } |u_n - u_p| \leq \epsilon$$

Si une suite converge vers un nombre réel $\ell$, ses termes se rapprochent de $\ell$, donc l'écart entre deux termes tend vers zéro. Autrement dit,

**Proposition 2.4.1.** Soit $(u_n)$ une suite convergente. Alors $(u_n)$ est une suite de Cauchy.

*Démonstration.* La preuve est directe. Soit $\ell$ la limite de $(u_n)$.

Soit $\epsilon > 0$.
Comme $\lim u_n = \ell$, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon/2 \tag{2.25}$$

Soient $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$. On a

$$\begin{aligned} |u_n - u_p| &\leq |u_n - \ell| + |\ell - u_p| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \qquad \text{par (2.25)} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

et la proposition est démontrée. □

La réciproque de la proposition 2.4.1 est nettement plus subtile et constitue une propriété fondamentale du corps des réels : sa complétude. La difficulté vient du fait qu'étant donnée une suite de Cauchy, il faut fabriquer une limite $\ell$.

**Définition 2.4.2.** Soit $\mathbb{K}$ un corps. On dit que $\mathbb{K}$ est *complet* si toute suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ possède une limite dans $\mathbb{K}$.

Ici, il faut avoir en tête les corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ essentiellement. Attention, on rappelle que $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps mais un anneau, car les éléments non nuls de $\mathbb{Z}$ ne sont pas inversibles pour la multiplication, sauf 1 et $-1$.

L'exemple suivant montre que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet et devrait expliquer pourquoi le corps sur lequel on se place a de l'importance.

*Exemple.* Considérons $\sqrt{2}$. Il s'agit d'un nombre irrationnel, c'est-à-dire d'un nombre réel qui ne peut s'écrire comme une fraction.
On peut par contre l'approcher par des fractions, par exemple en tronquant son développement décimal.
Notons $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel $x$, c'est-à-dire l'unique entier relatif vérifiant $E(x) \leq x < E(x) + 1$. On prendra garde à la nature des inégalités (la première large, la seconde stricte). On remarquera par ailleurs l'égalité

$$E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

Rappelons que max est employé ici plutôt que sup car, dans un ensemble d'entiers majoré comme ci-dessus, la borne supérieure est toujours atteinte.
On a de même

$$E(x) + 1 = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n > x\}$$

On en déduit les propriétés

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad n \leq x \Rightarrow n \leq E(x) \leq x \tag{2.26}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad n > x \Rightarrow n \geq E(x) + 1 > x \tag{2.27}$$

Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{E(10^n \sqrt{2})}{10^n} \in \mathbb{Q} \tag{2.28}$$

On peut facilement calculer les premiers termes de $(u_n)$. On obtient

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 1 | $1,4$ | $1,41$ | $1,414$ | $1,4142$ | $1,41421$ |

qui correspond bien au développement décimal de $\sqrt{2}$. En fait, par définition de la partie entière, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad E(10^n \sqrt{2}) \leq 10^n \sqrt{2} < E(10^n \sqrt{2}) + 1$$

et, en divisant par $10^n$, et en utilisant (2.28),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq \sqrt{2} < u_n + \frac{1}{10^n} \tag{2.29}$$

Toujours par (2.28), on a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 10E(10^n \sqrt{2}) \leq 10^{n+1} \sqrt{2} < 10E(10^n \sqrt{2}) + 10$$

d'où par (2.26) et (2.27),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 10E(10^n \sqrt{2}) \leq E(10^{n+1} \sqrt{2}) \leq 10^{n+1} \sqrt{2}$$

et

$$10^{n+1} \sqrt{2} < E(10^{n+1} \sqrt{2}) + 1 \leq 10E(10^n \sqrt{2}) + 10$$

et en divisant par $10^{n+1}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2} < u_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} \leq u_n + \frac{1}{10^n} \tag{2.30}$$

En résumé, la suite $(u_n)$ est croissante majorée par (2.30) ; et la suite $(u_n + 10^{-n})$ est décroissante minorée toujours par (2.30). De plus leur différence tend vers zéro. Ainsi $(u_n)$ et $(u_n + 10^{-n})$ sont deux suites adjacentes. Par le corollaire 2.2.2, elles convergent vers la même limite $\ell$. Le théorème 2.3.2 associé à (2.29) montre que la suite constante $(\sqrt{2})$ tend vers $\ell$, c'est-à-dire que $\ell$ est égal à $\sqrt{2}$.
Ainsi la suite $(u_n)$ tend vers $\sqrt{2}$.

On peut conclure de l'exemple précédent

**Proposition 2.4.2.** Le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

*Démonstration.* La suite (2.28) converge dans $\mathbb{R}$ donc est une suite de Cauchy par la proposition 2.4.1.
Par ailleurs, elle est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ mais sa limite n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. Ceci nous dit exactement que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. □

Traitons maintenant le cas de $\mathbb{R}$.

**Théorème 2.4.1.** Le corps $\mathbb{R}$ est complet.

*Démonstration.* Soit $(u_n)$ une suite réelle de Cauchy. On veut montrer qu'il existe un réel $\ell$ tel que $\lim u_n = \ell$. On procède en trois étapes.

<u>Etape 1 :</u> $(u_n)$ est bornée.

Cela découle du lemme suivant.

**Lemme 2.4.1.** Toute suite de Cauchy est bornée.

*Preuve du lemme 2.4.1.* Soit $(u_n)$ de Cauchy. On pose $\epsilon = 1$ et on utilise la définition 2.4.1. On trouve ainsi $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout couple d'entiers $(n, p)$, on a

$$n \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0 \Rightarrow |u_n - u_p| \leq 1 \tag{2.31}$$

On déduit en particulier de (2.31) (prendre $p = n_0$)

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_{n_0} - 1 \leq u_n \leq u_{n_0} + 1 \tag{2.32}$$

Il suffit de poser

$$a = \min\{u_0, \ldots, u_{n_0-1}, u_{n_0} - 1\}$$

et

$$b = \max\{u_0, \ldots, u_{n_0-1}, u_{n_0} + 1\}$$

et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a \leq u_n \leq b$$

donc la suite $(u_n)$ est bien bornée. □

Etape 2 : $(u_n)$ admet une sous-suite convergente.

Il s'agit d'une application directe de Bolzano-Weierstrass à la suite bornée $(u_n)$. Appelons $\ell$ la limite et $(u_{\phi(n)})$ la sous-suite.

Etape 3 : $(u_n)$ converge vers $\ell$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme $(u_n)$ est de Cauchy, on peut trouver $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_1 \text{ et } p \geq n_1 \Rightarrow |u_n - u_p| \leq \epsilon/2 \tag{2.33}$$

Comme $\lim u_{\phi(n)} = \ell$, on peut trouver $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_2 \Rightarrow |u_{\phi(n)} - \ell| \leq \epsilon/2 \tag{2.34}$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Pour $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned}
|u_n - \ell| &\leq |u_n - u_{\phi(n)}| + |u_{\phi(n)} - \ell| \\
&\leq \epsilon/2 + |u_{\phi(n)} - \ell| \qquad \text{par (2.33) et le lemme 2.3.1} \\
&\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \qquad \text{par (2.34)} \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

ce qui termine l'étape 3 et la preuve du théorème. □

*Remarque.* In fine, la différence entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ tient au fait que $\mathbb{R}$ possède l'axiome de la borne supérieure, et pas $\mathbb{Q}$. En effet, la suite (2.28) est croissante majorée donc converge dans $\mathbb{R}$ vers sa borne supérieure. Autrement dit, le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est la borne supérieure de la suite (2.28) à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

# Chapitre 3

# Grands théorèmes de l'analyse : fonctions d'une variable réelle

*Cadre général :* Dans tout le chapitre, et sauf mention explicite du contraire, $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I$ à valeurs réelles.

## 3.1 Bornes supérieures et inférieures de fonctions.

On énonce quelques propriétés des bornes supérieures et inférieures de fonctions, en adaptant la section 2.1.
On rappelle que

i) $f$ est majorée sur $I$ si

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in I,\ f(x) \leq M$$

$M$ est appelé majorant de $f$.

ii) $f$ est minorée sur $I$ si

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in I,\ f(x) \geq m$$

$m$ est appelé minorant de $f$.

iii) $f$ est bornée sur $I$ si elle y est minorée et majorée.

En raisonnant comme dans le lemme 2.1.1, on montre

**Lemme 3.1.1.** $f$ est bornée sur $I$ si et seulement $|f|$ est majorée sur $I$.

Comme $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure, on peut définir la borne supérieure, respectivement inférieure, d'une fonction majorée, respectivement minorée sur $I$ (cf. définition 2.1.1).

**Définition 3.1.1.**

i) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction majorée. On appelle *borne supérieure* de $f$ sur $I$ le plus petit des majorants de $f$ sur $I$. On la note $\sup_I f$ ou $\sup_{x \in I} f(x)$.

ii) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction minorée. On appelle *borne inférieure* de $f$ le plus grand des minorants de $f$. On la note $\inf_I f$ ou $\inf_{x \in I} f(x)$.

On a les propriétés suivantes. Notons que d'autres propriétés fort utiles sont à démontrer dans les exercices 5.3.2 et 5.3.3.

**Lemme 3.1.2.** Soient $f$ et $g$ des fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda$ un réel strictement positif. Supposons $f$ et $g$ bornées sur $I$. Alors les fonctions $(-f)$, $\lambda f$ et $f+g$ sont bornées sur $I$ et on a

i) $\sup_I(-f) = \inf_I f$.

ii) $\sup_I(\lambda f) = \lambda \sup_I f$ et $\inf_I(\lambda f) = \lambda \inf_I f$.

iii) $\sup_I(f+g) \leq \sup_I f + \sup_I g$.

*Démonstration.* En vertu du lemme 3.1.1, nous montrons d'abord que les valeurs absolues des fonctions proposées sont majorées. Soit $M$ un majorant commun à $|f|$ et à $|g|$ sur $I$. Pour $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} &|-f(x)| = |f(x)| \leq M \\ &|\lambda f(x)| = \lambda |f(x)| \leq \lambda M \\ &|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq 2M \end{aligned}$$

et l'assertion est prouvée.
Montrons i). Il résulte des définitions que $A$ est un majorant de $f$ sur $I$ si et seulement si $-A$ est un minorant de $-f$ sur $I$ ; et que $A' \leq A$ est un plus petit majorant de $f$ si et seulement si $-A' \geq -A$ est un plus grand minorant de $-f$.
La preuve du ii) est similaire. On constate que $A$ est un majorant de $f$ sur $I$ si et seulement si $\lambda A$ est un majorant de $\lambda f$ sur $I$ ; et que $A' \leq A$ est un plus petit majorant de $f$ si et seulement si $\lambda A' \leq \lambda A$ est un plus petit majorant de $\lambda f$.
Enfin, on a

$$\forall x \in I, \qquad f(x) + g(x) \leq \sup_I f + \sup_I g$$

Autrement dit $\sup_I f + \sup_I g$ est un majorant de $f+g$ sur $I$.
Comme $\sup_I(f+g)$ est le plus petit majorant de $f+g$, on en déduit

$$\sup_I(f+g) \leq \sup_I f + \sup_I g$$

. □

Une adaptation directe de la proposition 2.1.1 donne une caractérisation de la borne supérieure.

**Proposition 3.1.1. Caractérisation de la borne supérieure.** Soit $f$ une fonction majorée sur $I$. Alors $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de $f$ sur $I$ si et seulement si

$$\begin{aligned} &\forall x \in I, \qquad f(x) \leq M \\ &\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in I \qquad \text{tel que } M - \epsilon < f(x) \leq M \end{aligned} \tag{3.1}$$

Il y a bien entendu une version borne inférieure, obtenue de la proposition 2.1.2.

**Proposition 3.1.2. Caractérisation de la borne inférieure.** Soit $f$ une fonction minorée sur $I$. Alors $m \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de $f$ sur $I$ si et seulement si

$$\begin{aligned} &\forall x \in I, \qquad f(x) \geq m \\ &\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in I \qquad \text{tel que } m \leq f(x) < m + \epsilon \end{aligned} \tag{3.2}$$

## 3.2 Fonctions continues et théorème des valeurs intermédiaires.

**Définition 3.2.1.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. On dit que $f$ est *continue* en $x_0$ si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, i.e. si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \qquad \left.\begin{array}{l} |x - x_0| \leq \alpha \\ x \in I \setminus \{x_0\} \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon \tag{3.3}$$

On remarquera que l'on peut remplacer (3.3) par

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \qquad \left.\begin{array}{l} |x - x_0| \leq \alpha \\ x \in I \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon \tag{3.4}$$

puisque $|f(x) - f(x_0)|$ vaut zéro en $x = x_0$ et que cette quantité est inférieure ou égale à tout $\epsilon > 0$.
Il est toutefois important de comprendre la démarche, cf. section 1.1 : pour calculer la limite de $f$ en $x_0$, *on n'utilise pas la valeur de $f$ en $x_0$*. Une fois cette limite calculée - si elle existe - on la compare à $f(x_0)$ et on décide si, oui ou non, la fonction est continue en $x_0$.

*Exemples.*

i) La fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

est continue en 0 d'après le calcul de limite fait en section 1.1, voir aussi les figures 1.1, 1.2 et 1.3.

ii) La fonction "signe"

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

représentée en figure 3.1, vérifie

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

donc n'est pas continue en 0 par la proposition 1.1.1.

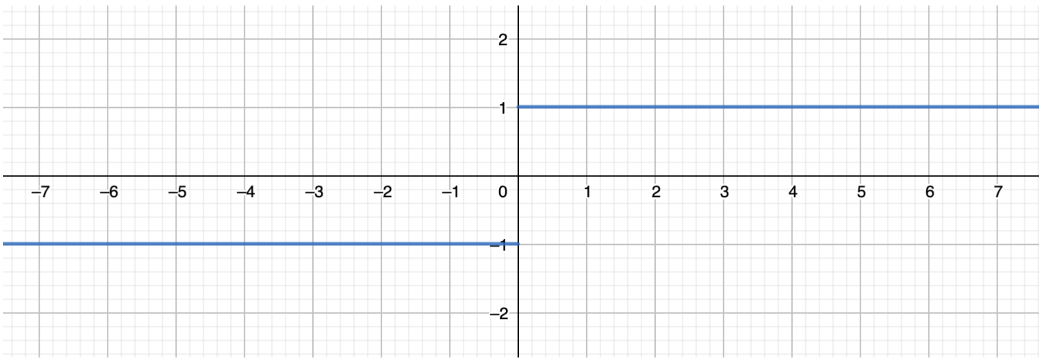


Figure 3.1 – Fonction "signe".

iii) La fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

représentée en figure 3.2, n'est pas continue en 0, cf. exercice 5.1.3.
En fait, étant donné $\theta \in [0, 2\pi]$, la suite $(x_n)_{n>0}$ définie par

$$\forall n > 0, \qquad x_n = \frac{1}{\theta + 2n\pi} \tag{3.8}$$

tend vers zéro, mais la suite $(f(x_n))_{n>0}$ vérifie

$$\forall n > 0, \qquad f(x_n) = \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta \tag{3.9}$$

Si $f$ admettait une limite en 0, alors par la caractérisation séquentielle des limites (théorème 1.4.1), on aurait que toute suite $(f(x_n))$ - avec $(x_n)$ définie en (3.8) - tendrait vers cette limite fixe, contredisant (3.9) où la limite dépend du choix d'un paramètre $\theta$.

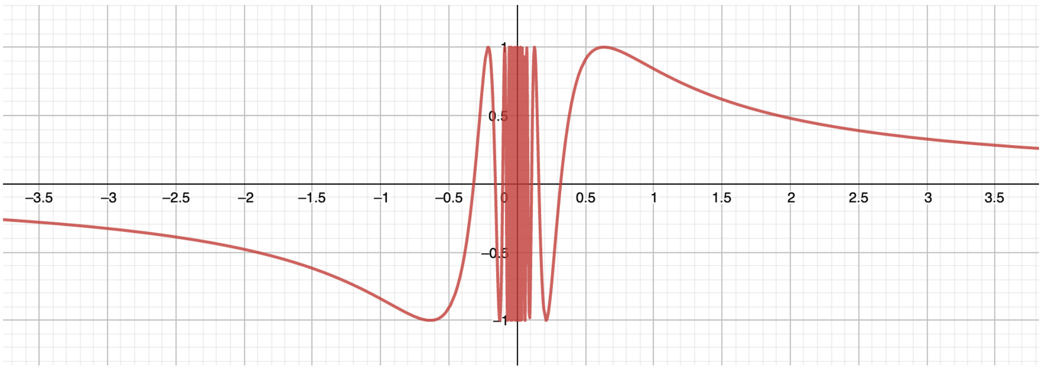


FIGURE 3.2 – Fonction $\sin(1/x)$.

On définit de même la continuité à droite et à gauche en disant que $f$ est *continue à droite*, respectivement à *continue à gauche*, en $x_0 \in I$ si $\lim_{x \to x_O^+} f(x) = f(x_0)$, respectivement $\lim_{x \to x_O^-} f(x) = f(x_0)$. Cela suppose que $I$ contienne un intervalle du type $[x_0, x_0 + c]$, respectivement $[x_0 - c, x_0]$.
Ainsi, la fonction "signe" définie en (3.6) est continue à gauche en 0, mais pas continue à droite.

On dit enfin que $f : I \to \mathbb{R}$ est *continue sur $I$*, ou plus brièvement *continue*, si elle est continue en tout point de $I$.

Pour montrer la continuité d'une fonction sur un intervalle $I$, on utilise le fait que les fonctions classiques (polynômes, fonctions trigonométriques, exp, ln, ...) sont continues [1]. Puis on utilise les théorèmes suivants.

**Théorème 3.2.1.** Soient $f$ et $g$ des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle $I$. On suppose $f$ et $g$ continues sur $I$. Alors

i) la somme $f + g$ et le produit $fg$ sont continues sur $I$.

ii) le quotient $f/g$ est continue en tout point $x \in I$ tel que $g(x) \neq 0$.

1. C'est un travail fastidieux - et pas forcément facile - d'établir la continuité de ces fonctions. Souvent, on montre leur dérivabilité, cf. section 3.3. Le lecteur consciencieux pourra s'interroger s'il sait justifier la continuité de ces fonctions.

*Démonstration.* Le point i) est une retranscription directe du théorème 1.1.1. Le point ii) est traité à l'exercice 5.1.2. □

**Théorème 3.2.2.** Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue.

*Démonstration.* Cela découle de l'exercice 5.1.12. □

Enfin notons le corollaire immédiat du théorème 1.4.1 qui nous sera utile dans la suite.

**Proposition 3.2.1. Caractérisation séquentielle de la continuité.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Alors $f$ est continue en $x_0$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)$ de $I$ convergeant vers $x_0$, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Et pour être complets, donnons la définition de prolongement par continuité.

**Définition 3.2.2.** Soit $x_0 \in I$ et soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. On suppose

i) $f$ est continue sur $I \setminus \{x_0\}$.

ii) Il existe un réel $\ell$ tel que $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

La fonction continue sur $I$

$$x \in I \longmapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est appelée *prolongement par continuité de $f$* à $I$.

Lorsqu'il existe, le prolongement par continuité est unique, par unicité de la limite. Notons que la fonction (3.5) est le prolongement par continuité de la fonction

$$x : \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

à $\mathbb{R}$. La fonction (3.7) n'est pas le prolongement par continuité de $\sin(1/x)$ à $\mathbb{R}$ ; en fait, il n'en existe pas puisque $\sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

Nous énonçons et démontrons maintenant les grands théorèmes de la continuité en finissant par le théorème des valeurs intermédiaires.

**Théorème 3.2.3.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $I$ est un intervalle fermé borné $[a, b]$. Alors $f$ est bornée sur $I$ et atteint ses bornes.

Autrement dit, $f$ est bornée sur $I$ et il existe $x \in I$ et $y \in I$ tels que

$$f(x) = \inf_I f \qquad \text{et} \qquad f(y) = \sup_I f$$

L'hypothèse *On suppose que $I$ est un intervalle fermé borné* $[a, b]$ est cruciale. La fonction $1/x$ sur $]0, 5]$ est continue mais certainement pas bornée ! (voir figure 3.3). Cela n'entre pas en contradiction avec le théorème car l'intervalle de définition $]0, 5]$ est ouvert en 0.

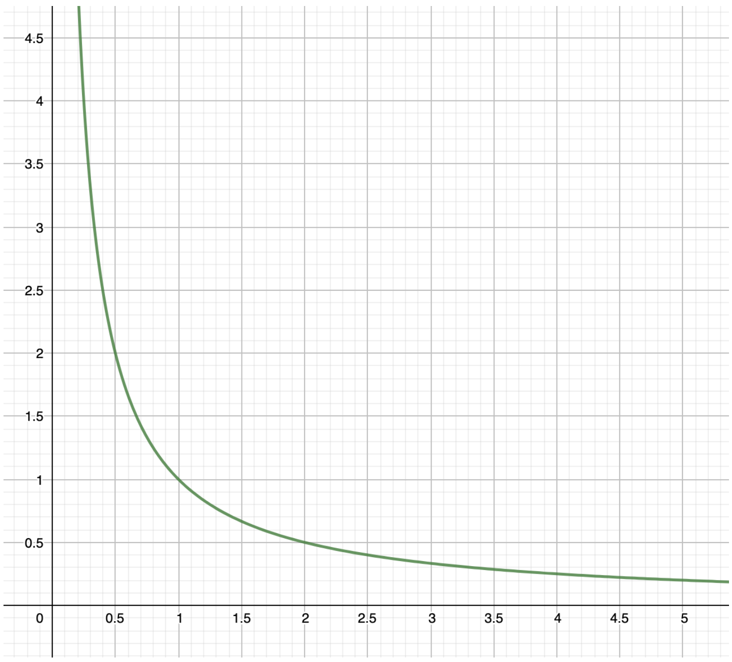


FIGURE 3.3 – Fonction $1/x$.

*Démonstration.* Il s'agit d'une application répétée du théorème de Bolzano-Weierstrass. Supposons par l'absurde que $f$ n'est pas majorée sur $I$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in I$ tel que $f(x_n) > n$. On construit ainsi une suite $(x_n)$ de $I$ telle que $(f(x_n))$ n'est pas majorée et tend vers $+\infty$.
Comme $I = [a, b]$, la suite $(x_n)$ est bornée. Par Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergente. Appelons $c$ la limite. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a \leq x_n \leq b$$

d'où, par passage à la limite sur les inégalités (cf. exercice 5.1.15), $a \leq c \leq b$, c'est-à-dire $c \in I$.
Mais la continuité de $f$ sur $I$ entraîne, en utilisant la proposition 3.2.1, que la suite

$(f(x_n))$ converge vers $f(c)$. Elle est en particulier bornée (lemme 2.4.1). Contradiction. La fonction $f$ est majorée sur $I$.
On montre par un raisonnement analogue que $f$ est minorée sur $I$. On peut donc parler de ses bornes supérieures et inférieures sur $I$.

Il nous reste à montrer que ces bornes sont atteintes. Faisons-le pour la borne supérieure, la preuve pour la borne inférieure est similaire. La caractérisation 3.1.1 implique que, pour tout $n > 0$, on peut trouver $x_n \in I$ vérifiant

$$\sup_I f - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \sup_I f$$

Mais alors la suite $(f(x_n)$ vérifie

$$\forall n > 0, \qquad |f(x_n) - \sup_I f| \leq \frac{1}{n}$$

autrement dit converge vers $\sup\limits_I f$.
Or $(x_n)$ est une suite de $I$, donc une suite bornée. Par Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergente. Appelons $c$ la limite. La continuité de $f$ sur $I$ entraîne, en utilisant la proposition 3.2.1, que la suite $(f(x_{\phi(n)}))$ converge vers $f(c)$. Mais par la proposition 2.3.1, on sait qu'elle converge vers $\sup\limits_I f$.
Par unicité de la limite, on a bien $\sup\limits_I f = f(c)$. □

Nous pouvons énoncer

**Théorème 3.2.4. Théorème des valeurs intermédiaires.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $a$ et $b$ deux points de $I$ tels que $f(a) < f(b)$. Alors, pour tout $y$ appartenant à l'intervalle $]f(a), f(b)[$ il existe un réel $c$ strictement compris entre $a$ et $b$ tel que $y = f(c)$.

Par $c$ strictement compris entre $a$ et $b$, il faut comprendre $a < c < b$ si $a < b$ et $b < c < a$ si $b < a$. On notera que ces deux cas sont autorisés dans l'énoncé du théorème.

La situation est représentée sur la figure 3.4. La droite horizontale bleue est d'ordonnée $y$, les deux droites vertes d'ordonnée $f(a)$ et $f(b)$. Pour $c$, on peut prendre l'abscisse de n'importe lequel des trois points noirs.

Le théorème des valeurs intermédiaires est un des résultats les plus classiques de l'analyse réelle et, à ce titre, il est vu dès le lycée. Il n'en reste pas moins délicat à démontrer tôt, car reposant sur l'axiome de la borne supérieure.

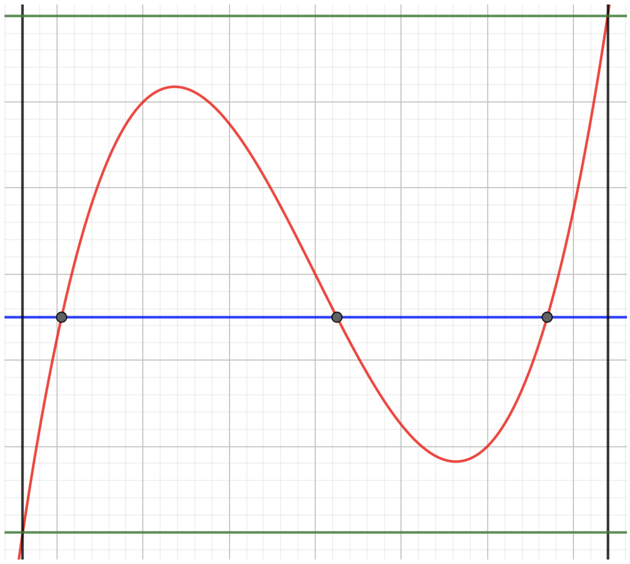

FIGURE 3.4 – Théorème des valeurs intermédiaires.

*Démonstration.* On se place sous les hypothèses du théorème et on suppose qu'on est dans le cas $a < b$. Le cas $b < a$ s'en déduira en remplaçant $a$ par $b$ dans toute la démonstration qui suit.
Soit $y \in ]f(a), f(b)[$. Posons

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\} \tag{3.10}$$

Il s'agit d'un ensemble non vide (car $a \in E$) majoré (par $b$) de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne supérieure qu'on dénotera $c$.
Comme dans la preuve du théorème 3.2.3, la caractérisation de la borne supérieure nous permet de construire une suite $(x_n)$ de $E$ qui converge vers $c$. Par continuité de $f$, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(c)$ et on déduit de (3.10) l'inégalité

$$f(c) \leq y \tag{3.11}$$

Notons que $c$ est strictement inférieur à $b$ puisque $f(b) > y$. De plus, par définition de $E$ et de $c$, on a

$$\forall x \in ]c, b], \qquad f(x) > y \tag{3.12}$$

Considérons la suite

$$\forall n \in N^*, \qquad c_n = c + \frac{1}{n}$$

Comme $(c_n)$ tend vers $c$, à partir d'un certain rang, disons $n_0$, les termes $c_n$ appartiennent à $]c, b]$. Par (3.12), on a alors

$$\forall n \geq n_0, \qquad f(c_n) > y \tag{3.13}$$

Par continuité, comme $(c_n)$ tend vers $c$, on a que $(f(c_n))$ tend vers $f(c)$ ; en passant à la limite dans (3.13), on obtient l'inégalité

$$f(c) \geq y \tag{3.14}$$

On déduit de (3.11) et (3.14) l'égalité $y = f(c)$ qui termine la preuve du théorème des valeurs intermédiaires. □

**Corollaire 3.2.1.** L'image d'un intervalle fermé borné par une application continue est un intervalle fermé borné.

Autrement dit, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné. Attention, ce n'est pas $[f(a), f(b)]$ en général, cf. Figure 3.7.

*Démonstration.* Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Le théorème 3.2.3 entraîne que $f$ est bornée et atteint ses bornes. Appelons $m$ sa borne inférieure et $M$ sa borne supérieure.
Nous allons montrer que $f([a, b])$ est l'intervalle fermé borné $[m, M]$. On notera que cet intervalle peut être réduit à un point. C'est le cas si et seulement $m = M$, c'est-à-dire si et seulement si $f$ est constante sur $[a, b]$.
Soit $y \in [m, M]$. Il nous suffit de montrer que $y$ est atteint, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$. Toujours par le théorème 3.2.3 c'est le cas si $y = m$ ou $y = M$. On peut donc supposer $f$ non constante et $y \in ]m, M[$. Soient $a_1 \in [a, b]$ et $b_1 \in [a, b]$ tels que $m = f(a_1)$ et $M = f(b_1)$. La fonction $f$ est continue sur $[a_1, b_1]$ et $y \in ]f(a_1), f(b_1)[$ donc il existe $x \in ]a_1, b_1[$ tel que $y = f(x)$ par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $f$ sur l'intervalle fermé borné $[a_1, b_1]$. En particulier, $x \in [a, b]$ et $y = f(x)$ est atteint sur $[a, b]$. □

## 3.3 Fonctions dérivables et théorèmes des accroissements finis.

**Définition 3.3.1.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. On dit que $f$ est *dérivable* en $x_0$ si le *taux d'accroissement*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3.15}$$

tend vers une limite finie quand $h$ tend vers zéro.
On appelle *dérivée* de $f$ en $x_0$ la limite obtenue et on la note $f'(x_0)$.

Pour paraphraser la définition, pour $f$ dérivable en $x_0$, sa dérivée $f'(x_0)$ satisfait

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3.16}$$

Il y a une interprétation géométrique classique de la dérivée. Rappelons que si $A(x_0, y_0)$ et $B(x_1, y_1)$ sont deux points de $\mathbb{R}^2$ avec $x_0 \neq x_1$, l'unique droite affine passant par ces deux points a une équation réduite

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

Le coefficient $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ s'appelle *pente* de la droite et représente la variation d'ordonnée lorsque l'on passe d'un point d'abscisse $x$ à un point d'abscisse $x + 1$ en restant sur la droite.
On voit ainsi que, pour $h$ fixé non nul, le taux d'accroissement (3.15) représente la pente de la droite passant par les deux points $A(x_0, f(x_0))$ et $B_h(x_0 + h, f(x_0 + h))$ du graphe de $f$.
Lorsque $h$ tend vers zéro, le point $B_h$ tend vers le point $A$ en suivant le graphe de $f$ et on regarde si l'équation réduite de la droite $(AB_h)$

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + y_0$$

converge vers une équation réduite de droite. C'est le cas si et seulement si $f$ est dérivable en $x_0$ et la droite limite est d'équation réduite

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

et s'appelle la *tangente* du graphe de $f$ en $A$. Tout cela est illustré par la figure 3.5 où la droite bleue est la tangente du graphe en $A$ et s'obtient comme limite des droites $(AB_0)$, $(AB_1)$, $(AB_2)$, ...

Si le graphe de $f$ possède un extremum local en $x_0$, on voit que la tangente est horizontale. En termes analytiques,

**Lemme 3.3.1.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0$ un point intérieur de $I$. Supposons que $f$ admette un extremum local en $x_0$, c'est-à-dire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \qquad |x - x_0| \leq \epsilon \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

(maximum local) ou

$$\forall x \in I, \qquad |x - x_0| \leq \epsilon \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

(minimum local). Supposons enfin que $f$ soit dérivable en $x_0$. Alors $f'(x_0)$ est nul.

*Démonstration.* Supposons que $f$ admette un maximum local en $x_0$. Alors pour $h$ suffisamment proche de 0, on a $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, ou encore $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$. Divisons par $h$, supposé non nul. Pour $h > 0$, on obtient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \tag{3.17}$$

et pour $h < 0$,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \tag{3.18}$$

Passons à la limite quand $h$ tend vers zéro dans (3.17) et (3.18), on en déduit

$$f'(x_0) \leq 0 \qquad \text{et} \qquad f'(x_0) \geq 0$$

soit $f'(x_0) = 0$.

Le cas du minimum local s'obtient en renversant toutes les inégalités précédentes. □

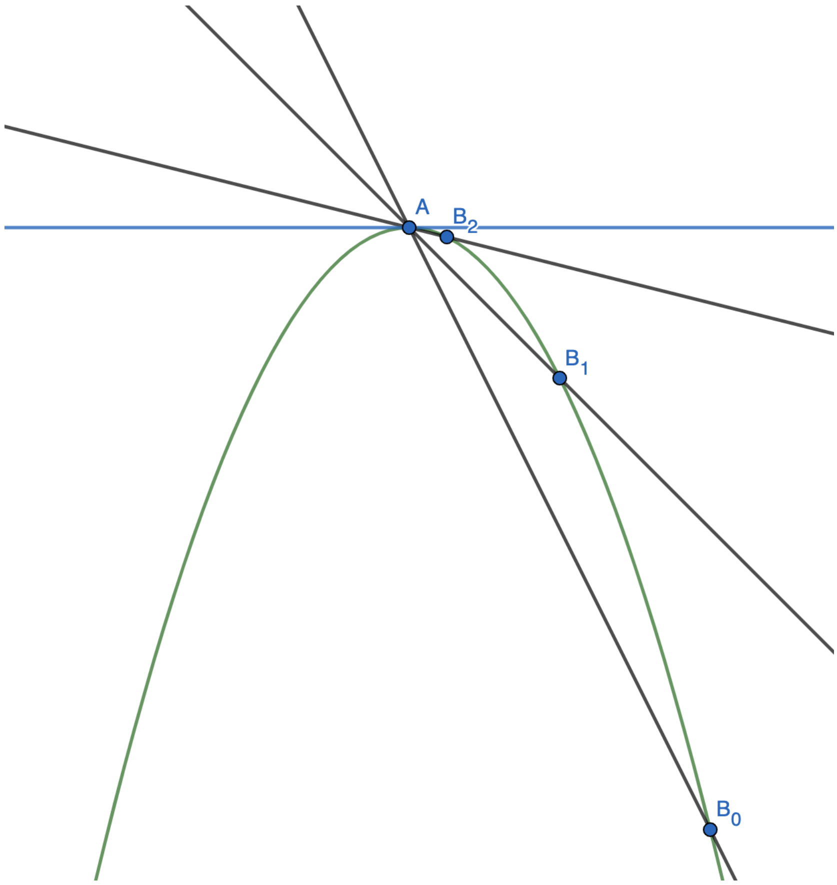


FIGURE 3.5 – Tangente à un graphe.

On définit de même la dérivabilité à droite et à gauche en disant que $f$ est *dérivable à droite*, respectivement *dérivable à gauche*, en $x_0 \in I$ si le taux d'accroissement de $f$ en $x_0$ admet une limite à droite finie, respectivement une limite à gauche finie. Cela suppose que $I$ contienne un intervalle du type $[x_0, x_0 + c]$, respectivement $[x_0 - c, x_0]$.

Notons que dans la preuve du lemme 3.3.1, quand on passe à la limite dans (3.17), il s'agit d'une limite à droite puisque $h > 0$, donc on tombe sur la dérivée à droite de $f$ en $x_0$ ; et quand on passe à la limite dans (3.18), il s'agit d'une limite à gauche puisque $h < 0$, donc on tombe sur la dérivée à gauche de $f$ en $x_0$. Cela ne change en rien le raisonnement en vertu du lemme suivant.

**Lemme 3.3.2.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$ un point intérieur. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

i) $f$ est dérivable en $x_0$.

ii) $f$ est dérivable à gauche et à droite en $x_0$ et les dérivées à gauche et à droite sont égales.

De plus, lorsque ces conditions son réalisées, la dérivée de $f$ en $x_0$ est égale à sa dérivée à gauche et à sa dérivée à droite.

*Démonstration.* C'est une application immédiate des définitions et de la proposition 1.1.1. □

*Exemple.* La fonction valeur absolue

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto |x| \in \mathbb{R}$$

représentée en figure 3.6 est dérivable à gauche et à droite en 0. La dérivée à gauche vaut $-1$ mais la dérivée à droite vaut $+1$. La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

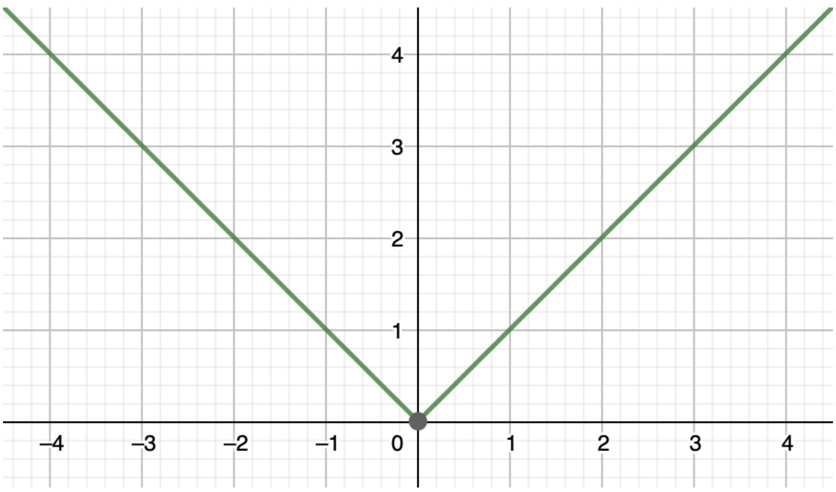


FIGURE 3.6 – Fonction $|x|$.

On dit enfin que $f : I \to \mathbb{R}$ est *dérivable sur* $I$, ou plus brièvement *dérivable*, si elle est dérivable en tout point de $I$.

La dérivabilité est une notion plus forte que la continuité. On a

**Proposition 3.3.1.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si $f$ est dérivable en $x_0$, elle est continue en $x_0$.

Et donc si $f$ est dérivable sur $I$, elle est continue sur $I$.

*Démonstration.* Soient $x_0 \in I$ et $h \neq 0$. On peut écrire

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h$$

Comme $f$ est dérivable en $x_0$, le taux d'accroissement en $x_0$ tend vers $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, donc le membre de droite tend vers zéro quand $h$ tend vers zéro.
Ainsi $f(x_0 + h)$ tend vers $f(x_0)$ et $f$ est continue en $x_0$. □

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple précédent de la valeur absolue (figure 3.6) qui est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Pour montrer la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle $I$, on utilise le fait que les fonctions classiques (polynômes, fonctions trigonométriques, exp, ln, ...) sont dérivables. Puis on utilise les théorèmes suivants.

**Théorème 3.3.1.** Soient $f$ et $g$ des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle $I$. On suppose $f$ et $g$ dérivables sur $I$. Alors

i) la somme $f + g$ et le produit $fg$ sont dérivables sur $I$ et on a les formules

$$\forall x \in I, \qquad \begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned} \tag{3.19}$$

ii) le quotient $f/g$ est dérivable en tout point $x \in I$ tel que $g(x) \neq 0$ avec

$$\forall x \in I, \qquad (f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{3.20}$$

*Démonstration.* Soit $x \in I$. Pour $h \neq 0$, on a

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \tag{3.21}$$

autrement dit le taux d'accroissement de $f + g$ est égal à la somme des taux d'accroissements de $f$ et de $g$.

Comme $f$ et $g$ sont dérivables, et en utilisant le théorème 1.1.1, on obtient que le membre de droite de (3.21) converge vers $f'(x) + g'(x)$ quand $h$ tend vers zéro. Donc le membre de gauche converge également, prouvant que $f + g$ est dérivable et donnant la première formule de (3.19).

Pour $h \neq 0$, on a de même

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} =& \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \\ &+ \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} =& \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) \\ &+ f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\end{aligned} \tag{3.22}$$

Comme $f$ et $g$ sont dérivables donc continues par la proposition 3.3.1, et en utilisant le théorème 1.1.1, on obtient que le membre de droite de (3.22) converge vers $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ quand $h$ tend vers zéro. Donc le membre de gauche converge également, prouvant que $fg$ est dérivable et donnant la deuxième formule de (3.19).

La preuve du point ii) est similaire, en établissant pour $g(x) \neq 0$ la formule

$$\begin{aligned}\frac{(f/g)(x+h) - (f/g)(x)}{h} =& \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x)\right. \\ &\left. -f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)\frac{1}{g(x)g(x+h)}\end{aligned} \tag{3.23}$$

et en passant à la limite d'abord sur le membre de droite, puis sur celui de gauche. On notera que $g$ étant continue et $g(x)$ non nul, pour $h$ suffisamment proche de 0 la quantité $g(x+h)$ est également non nulle et (3.23) bien définie. □

**Théorème 3.3.2.** Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $x \in I$. On suppose $f$ dérivable en $x$ et $g$ dérivable en $y = f(x)$. Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x$ et

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x) \tag{3.24}$$

*Démonstration.* Soit $x \in I$ et soit $y = f(x)$. Il est tentant de procéder comme dans la preuve du théorème 3.3.1 et d'écrire

$$\frac{g \circ f(x+h) - g \circ f(x)}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

mais on notera qu'on n'a aucun contrôle sur l'ensemble des réels $h$ tels que $f(x+h)-f(x)$ est non nul.
A la place, on définit la fonction

$$G(t) = \begin{cases} \dfrac{g(t)-g(y)}{t-y} & \text{si } t \neq y \\ g'(y) & \text{sinon} \end{cases}$$

On a l'équation

$$\forall t \in J, \qquad G(t)(t-y) = g(t) - g(y)$$

et, en appliquant à $f(t)$,

$$\forall t \in J, \qquad G(f(t))(f(t)-y) = g(f(t)) - g(y)$$

d'où, pour $t = x + h$ avec $h \neq 0$, en divisant par $h$,

$$G(f(x+h))\frac{f(x+h)-y}{h} = \frac{g(f(x+h))-g(y)}{h} \tag{3.25}$$

Notons que la dérivabilité de $g$ en $y$ entraîne non seulement que $G$ est bien définie en $y$ mais aussi qu'elle est continue en $y$.
Comme $f$ est dérivable en $x$, elle est continue en $x$ et

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = y$$

donc, par composition,

$$\lim_{h\to 0} G \circ f(x+h) = G(y) = g'(y)$$

On peut donc passer à la limite dans le membre de gauche de (3.25). On obtient comme limite $g'(y)f'(x)$. Ceci montre que le membre de droite tend également vers cette limite, c'est-à-dire que $g \circ f$ est dérivable et que la formule (3.24) est valide. □

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer les grands théorèmes des fonctions dérivables.

**Théorème 3.3.3. Théorème de Rolle.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose $f$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose enfin $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

La figure 3.7 illustre graphiquement le théorème de Rolle : une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et prenant la même valeur en $a$ et en $b$ possède (au moins) une tangente horizontale.

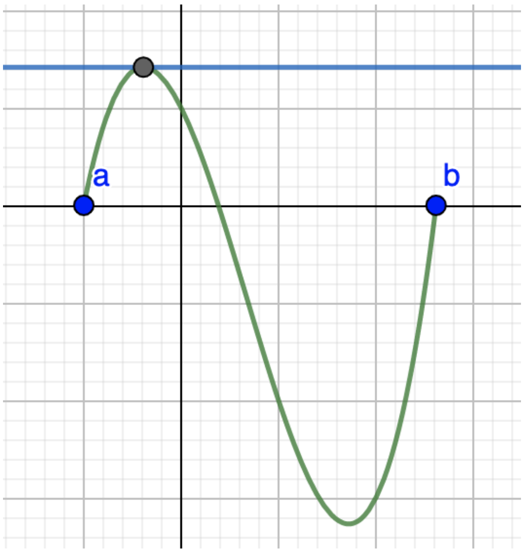


FIGURE 3.7 – Théorème de Rolle.

*Démonstration.* On se place sous les hypothèses du théorème. Le théorème 3.2.3 s'applique : $f$ est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes. Soient $m$ la borne inférieure et $M$ la borne supérieure.
Si $M = m$, la fonction est constante sur $[a, b]$ donc sa dérivée est nulle en tout point. On a $f'(c) = 0$ pour tout $c \in ]a, b[$.
Si $m < M$, les bornes sont atteintes en des points distincts. Comme $f(a) = f(b)$, au moins un des deux extrema est atteint en un point $c \in ]a, b[$. Le lemme 3.3.1 implique que $f'(c)$ s'annule. □

Ce résultat fondamental a pour conséquence les théorèmes des accroissements finis. Le pluriel s'impose. Il y a d'abord une égalité des accroissements finis, puis on en déduit une inégalité, moins forte, mais souvent la plus utilisée.

**Théorème 3.3.4. Egalité des accroissements finis.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soient $a < b$ deux points de $I$. Supposons $f$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3.26}$$

Ici encore on peut donner une belle interprétation géométrique. Dans (3.26), le terme de gauche est la pente de la tangente en $C = (c, f(c))$ et le terme de droite est la pente de la droite joignant $A = (a, f(a))$ à $B = (b, f(b))$. Le théorème énonce donc qu'étant donnés deux points $A$ et $B$ du graphe de $f$, sous des hypothèses de continuité et dérivabilité adéquates, on peut trouver un point $C$ du graphe tel que la droite $(AB)$ est parallèle à la tangente en $C$, cf. figure 3.8 . Rappelons en effet que deux droites ayant la même pente sont parallèles.

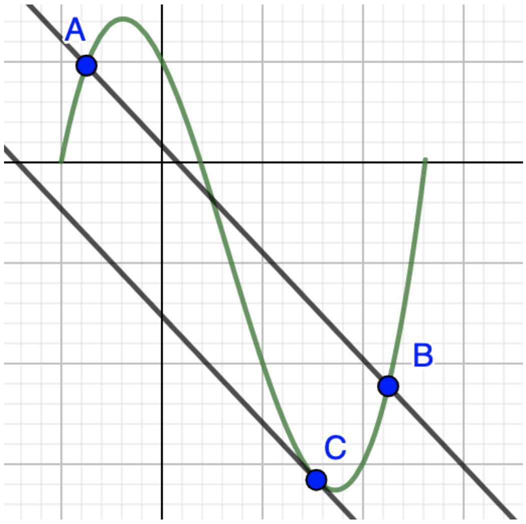


FIGURE 3.8 – Egalité des accroissements finis.

*Démonstration.* Soit $f$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Posons

$$t \in [0, 1] \longmapsto g(t) = f(a + t(b - a)) + t(f(a) - f(b))$$

Il s'agit de la somme de $f$ composée avec la fonction affine $t \mapsto a + t(b - a)$ et de la fonction affine $t \mapsto t(f(a) - f(b))$. Comme les fonctions affines sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et au vu des hypothèses sur $f$, on déduit des théorèmes 3.2.2 et 3.2.1 que $g$ est continue sur $[0, 1]$ ; et des théorèmes 3.3.2 et 3.3.1 que $g$ est dérivable sur $]0, 1[$ avec pour dérivée

$$\forall 0 < t < 1, \qquad g'(t) = f'(a + t(b - a))(b - a) + f(a) - f(b) \tag{3.27}$$

Enfin un calcul direct montre que $g(0) = g(1) = f(a)$.

On peut appliquer le théorème de Rolle à $g$. On obtient l'existence de $s \in ]0, 1[$ tel que $g'(s) = 0$. Posons $c = a + s(b - a)$ et observons que $c \in ]a, b[$. On a par (3.27),

$$f'(c) = f'(a + s(b - a)) = \frac{g'(s) - f(a) + f(b)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

démontrant (3.26). □

On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 3.3.1. Inégalité des accroissements finis.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose $f'$ bornée par $M$ sur $I$. Alors on a

$$\forall x \in I, \ \forall y \in I, \qquad |f(y) - f(x)| \leq M|y - x| \tag{3.28}$$

*Démonstration.* Soit $x \in I$ et soit $y \in I$. Si $x = y$, l'inégalité (3.28) est trivialement vérifiée. Supposons donc $x \neq y$ et, pour simplifier, $x < y$. La fonction $f$ est dérivable sur $[x, y]$, donc a fortiori continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. On peut donc appliquer l'égalité des accroissements finis à $f$ sur $[x, y]$. On en déduit l'existence de $c \in ]x, y[$ vérifiant (3.26). Mais alors,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| \leq M|y - x|$$

et (3.28) est vérifiée. □

*Exemple.* Considérons la fonction sin sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée, cos est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$. On déduit immédiatement du corollaire 3.3.1

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \qquad |\sin y - \sin x| \leq |y - x| \tag{3.29}$$

En appliquant cette inégalité à $y = 0$, on trouve l'inégalité standard

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\sin x| \leq |x| \tag{3.30}$$

On peut se débarasser des valeurs absolues en revenant à l'égalité des accroissements finis. Pour $x > 0$, on applique le théorème 3.3.4 à la fonction sinus sur $[0, x]$ et on obtient l'existence de $c \in ]0, x[$ tel que

$$\sin x = x \cos c \leq x$$

Pour $x < 0$, on applique le théorème 3.3.4 à la fonction sinus sur $[x, 0]$ et on obtient l'existence de $c \in ]x, 0[$ tel que

$$\sin x = x \cos c \geq x$$

On a ainsi raffiné l'inégalité standard (3.30) en

$$\forall x \geq 0, \qquad \sin x \leq x \tag{3.31}$$

et

$$\forall x \leq 0, \qquad \sin x \geq x \tag{3.32}$$

## 3.4 Fonctions uniformément continues et théorème de Heine.

Nous terminons ce chapitre en étudiant la notion de continuité uniforme.

**Définition 3.4.1.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est *uniformément continue* sur $I$ si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{r} |x-y| \leq \alpha \\ x \in I,\ y \in I \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon \tag{3.33}$$

Notons qu'on peut aussi l'écrire comme

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, \forall y \in I,\ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon \tag{3.34}$$

La phrase mathématique (3.33) est très proche de (3.4). La seule différence est que, dans (3.4), la variable $y$ est remplacée par $x_0$. Maintenant $y$ apparaît dans (3.33) avec le quantificateur $\forall$, alors que dans (3.4), le point $x_0$ est fixé avant. C'est normal, puisque dans ce dernier cas, on regarde la continuité *en* $x_0$, alors que la continuité uniforme se vérifie non pas un point mais sur tout l'intervalle $I$. Allons plus loin. Pour vraiment comparer la continuité et la continuité uniforme, il faut parler de la continuité sur $I$ et non de la continuité ponctuelle. Or $f$ est continue sur $I$ si $f$ est continue en tout point $y$ de $I$. Il s'agit donc de comparer (3.33) et (3.34) à

$$\forall y \in I,\ \forall \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon \tag{3.35}$$

La ressemblance entre ces deux phrases est frappante. Même implication, mêmes variables, mêmes quantificateurs.
Est-ce pour autant exactement la même chose ? Non, parce que l'ordre des quantificateurs n'est pas tout à fait le même, et que cela influe sur le sens de ces phrases. Le $\forall y \in I$ est placé tout au début de (3.35) mais au milieu de (3.34). Plus significatif, le $\forall y \in I$ est placé avant le $\exists \alpha > 0$ dans (3.35) mais après dans (3.34). Autrement dit, dans la définition de la continuité sur $I$, le $\alpha$ dépend de $\epsilon$ *et de* $y$ ; alors que dans la définition de la continuité uniforme sur $I$, le $\alpha$ *ne dépend que de* $\epsilon$.
C'est d'ailleurs le sens du mot uniforme ici. A $\epsilon$ fixé, on peut utiliser le même $\alpha$ en tout point $x \in I$ ; et non pas un $\alpha$ différent en chaque $y$.

Notons qu'il résulte de cette discussion que la continuité uniforme est une notion plus forte que la continuité. On peut donc énoncer

**Lemme 3.4.1.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $I$. Alors $f$ est continue sur $I$.

Dans le reste du paragraphe, nous allons chercher à comprendre quand une fonction continue est uniformément continue. C'est le cas pour les fonctions lipschitziennes.

**Définition 3.4.2.** Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *lipschitzienne* s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I, \qquad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

On dit aussi que $f$ est $k$-lipschitzienne.

*Exemple.* La fonction sinus est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ en vertu de l'inégalité (3.29).

Plus généralement, si $f$ est dérivable sur $I$ et que sa dérivée est bornée par $M$, alors l'inégalité des accroissements finis dit exactement que $f$ est $M$-lipschitzienne sur $I$.

**Proposition 3.4.1.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne sur $I$. Alors $f$ est uniformément continue sur $I$.

*Démonstration.* Supposons $f$ $k$-lipschitzienne sur $I$.
Soit $\epsilon > 0$. Posons $\alpha = \epsilon/k$. Soit $x \in I$ et soit $y \in I$. Supposons $|x - y| \leq \alpha$. On a

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \leq k\alpha = k\epsilon/k = \epsilon$$

et la proposition est démontrée. □

Voici au contraire un exemple de fonction continue (et même dérivable) mais pas uniformément continue.

*Exemple.* Considérons la fonction $x \to f(x) = 1/x$ sur $I = ]0, \infty[$, cf. Figure 3.3. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $I$, donc continue sur $I$. Soit $\alpha > 0$. Soit $x_\alpha$ la racine réelle positive du trinôme

$$x^2 + \alpha x - \alpha$$

Notons qu'elle existe toujours car le terme en $x^2$ et le terme constant sont de signes opposés.
Posons $y_\alpha = x_\alpha + \alpha$. On a donc

$$x_\alpha y_\alpha = x_\alpha(x_\alpha + \alpha) = \alpha$$

d'où

$$\frac{1}{x_\alpha} - \frac{1}{y_\alpha} = \frac{y_\alpha - x_\alpha}{x_\alpha y_\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \tag{3.36}$$

Soit $\epsilon$ un réel strictement compris entre 0 et 1. Pour tout $\alpha > 0$, on déduit de (3.36) l'existence de deux réels strictement positifs $x_\alpha$ et $y_\alpha$ vérifiant

$$|x_\alpha - y_\alpha| \leq \alpha \qquad \text{et} \qquad |f(x_\alpha) - f(y_\alpha)| = 1 > \epsilon$$

Autrement dit, on a montré

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in I, \exists y \in I,\ \text{tel que} \quad |x - y| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| > \epsilon \tag{3.37}$$

Mais c'est la négation de la phrase (3.34). On a donc montré que $f$ n'est pas uniformément continue sur $I$.

L'exemple précédent a la particularité d'être défini sur un intervalle ouvert, dérivable sur cet intervalle avec la dérivée qui tend vers $+\infty$ quand on tend vers une des extrémités de l'intervalle (0 ici).

Si on pense à l'égalité des accroissements finis, on peut croire qu'il suffit d'avoir cette propriété d'explosion de la dérivée à une des bornes de l'intervalle pour ne pas avoir continuité uniforme. Il n'en est rien, la nature de l'intervalle est fondamentale comme le montre le théorème de Heine.

**Théorème 3.4.1. (Heine).** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle fermé borné. Alors $f$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

*Exemple.* La fonction

$$x \in [0, 1] \longmapsto \sqrt{x}$$

représentée sur la figure 3.9 est continue sur $[0, 1]$ donc uniformément continue sur $[0, 1]$ par le théorème de Heine. Notons pourtant que sa dérivée $x \mapsto 1/2\sqrt{x}$, bien définie sur $]0, 1[$ tend vers $+\infty$ en 0.

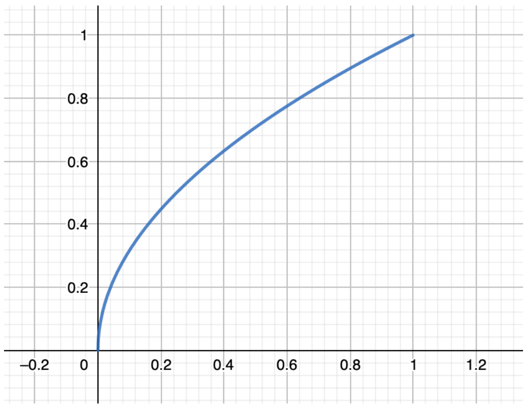


FIGURE 3.9 – Fonction racine carrée.

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que $f$ continue sur $[a, b]$ n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$ vérifiant (3.37). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\alpha = 1/n$, on peut donc trouver $x_n$ et $y_n$ dans $[a, b]$ tels que

$$|x_n - y_n| \leq 1/n \qquad \text{et} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon \tag{3.38}$$

La suite $(x_n)$ est une suite de $[a, b]$ fermé borné donc, par Bolzano-Weierstrass, une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ converge. Appelons $c$ sa limite et notons que, par passage à la limite sur les inégalités,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a \leq x_{\phi(n)} \leq b$$

on a $c \in [a, b]$. Il résulte de (3.38) que la suite $(x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)})$ tend vers zéro, donc que la suite $(y_{\phi(n)})$ converge également vers $c$.
La continuité de $f$ en $c \in [a, b]$ entraîne que les suites $(f(x_{\phi(n)}))$ et $(f(x_{\phi(n)}))$ convergent toutes deux vers $f(c)$. Par passage à la limite sur l'expression de droite de (3.38), on obtient

$$f(c) - f(c) = 0 \geq \epsilon > 0$$

ce qui est absurde. La fonction $f$ est uniformément continue sur $[a, b]$. $\square$

L'exercice 5.3.16 donne des exemples de fonctions non uniformément continues et/ou non lipschitziennes.

# Chapitre 4

# Séries de Fourier

Dans tout ce chapitre, on modifie un peu le cadre habituel en considérant des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

## 4.1 Fonctions périodiques.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Soit $T > 0$. On rappelle que $f$ est *périodique* de période $T$ si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) = f(x)$$

On dit aussi que $f$ est $T$-périodique.

*Remarque.* Une fonction $T$-périodique $f$ est aussi $2T$-périodique, $3T$-périodique, etc ... En général, on prendra pour $T$ la période minimale de $f$, c'est-à-dire qu'on supposera qu'il n'existe pas de réel $0 < T' < T$ tel que $f$ soit $T'$-périodique.
La période minimale existe pour toute fonction périodique non constante. En effet, une fonction constante étant périodique pour toute période $T > 0$, n'a pas de période minimale.

On préfère parfois remplacer la période $T$ par la fréquence.

**Définition 4.1.1.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $T$-périodique. La *fréquence* de $f$ est le nombre

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Les fonctions sinus et cosinus sont des exemples de fonctions périodiques de période $2\pi$. A partir d'elles, on construit aisément des fonctions de n'importe quelle période ou, ce qui revient au même, de n'importe quelle fréquence.
Etant donné $T > 0$ et la fréquence associée $\omega > 0$, il suffit de considérer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$t \longmapsto \cos(\omega t) \qquad \text{et} \qquad t \longmapsto \sin(\omega t)$$

et plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$

$$t \longmapsto \cos(n\omega t) \qquad \text{et} \qquad t \longmapsto \sin(n\omega t) \tag{4.1}$$

sont $T/n$ périodiques, donc aussi $T$-périodiques.

Nous verrons au paragraphe 4.2 qu'il est intéressant d'introduire les fonctions $T$-périodiques à valeurs complexes

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad e_n(t) := e^{in\omega t} = \cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t) \tag{4.2}$$

afin de simplifier certains calculs.

L'objet de la théorie de Fourier est de

i) montrer que, sous des hypothèses très générales, une fonction périodique $f$ s'écrit comme une combinaison linéaire

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n \tag{4.3}$$

de fonctions $e_n$ ou, ce qui revient au même, comme une combinaison linéaire

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(n\omega t) \tag{4.4}$$

de fonctions (4.1).

ii) donner des formules pour calculer les coefficients $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_n(f)$.

On peut faire une analogie avec la théorie des développements en série entière. Sous de bonnes conditions, vous avez vu qu'une fonction d'un intervalle $I$ dans $\mathbb{C}$ peut s'ecrire comme une série entière, c'est-à-dire comme une combinaison linéaire infinie de monômes $x \mapsto x^n$. C'est le cas par exemple de l'exponentielle. Sous de bonnes conditions, nous verrons dans ce chapitre qu'une fonction périodique peut s'écrire comme une combinaison linéaire infinie de fonctions périodiques (4.1).
L'analogie s'arrête toutefois là. Les techniques utilisées dans les deux cas sont très différentes. Et surtout les conditions sont très différentes. Alors que seules certaines fonctions infiniment dérivables admettent un développement en série entière (et souvent pas sur leur domaine de définition complet), nous verrons qu'on a déjà de bons résultats avec les fonctions périodiques continues.
En fait, la bonne classe de fonctions à considérer est celle des fonctions continues par morceaux.

**Définition 4.1.2.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que $f$ est *continue par morceaux* sur $I$ si, en restriction à tout intervalle fermé borné $[a, b]$ inclus dans $I$, il existe un nombre fini de réels

$$a_0 = a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$

tels que, pour tout $0 \leq i \leq n - 1$, la restriction de $f$ à $]a_i, a_{i+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.

En d'autres termes, $f$ est continue sur $[a, b]$ privé des points $a_1, \ldots, a_{n-1}$ et admet des limites à droite et à gauche en $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Remarquons que les définitions de continuité 3.2.1, de limites à droite et à gauche 1.1.2 restent valables quand on remplace $f : I \to \mathbb{R}$ par $f : I \to \mathbb{C}$, à condition d'interpréter maintenant $|\ |$ comme le module d'un nombre complexe. Il n'y a donc pas de difficulté supplémentaire à passer à des fonctions à valeurs complexes.
Les deux propriétés suivantes facilitent la vérification de la continuité par morceaux d'une fonction donnée.

i) Si $I$ est un intervalle fermé borné $[a, b]$, il suffit de vérifier la condition de la définition 4.1.2 sur l'intervalle $I$.
ii) Si $f$ est $T$-périodique sur $\mathbb{R}$, il suffit que $f$ vérifie la condition de la définition 4.1.2 sur un intervalle fermé borné de longueur $T$ pour être continue par morceaux.

L'exemple de la fonction "créneau" devrait clarifier la notion et montrer qu'il est très facile de construire des fonctions périodiques continues par morceaux.

*Exemple.* Soit $f : [-1, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction "créneau", c'est-à-dire la fonction qui vaut $-1$ sur $[-1, 0[$ et 1 sur $[0, 1[$ et qui est représentée sur la figure 4.1

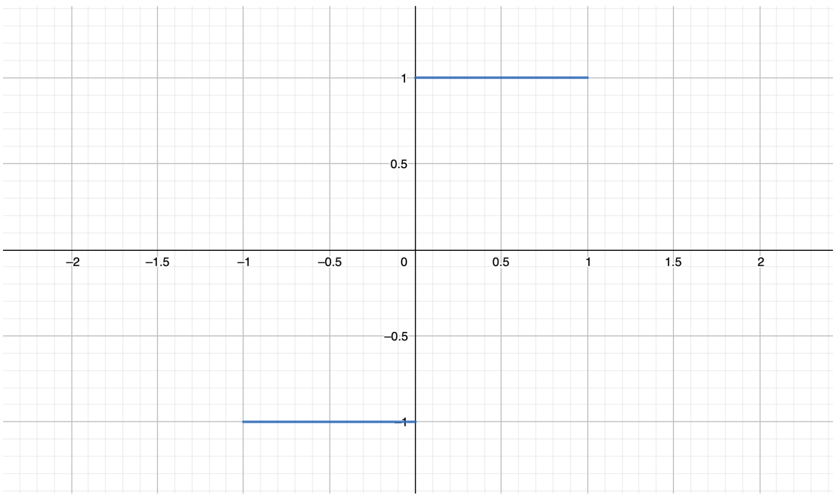


FIGURE 4.1 – Fonction "créneau" sur $[-1, 1]$.

On la prolonge en une fonction 2-périodique sur $\mathbb{R}$ tout entier en posant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in [-1, 1[$, $f(x + nT) = f(x)$. Le graphe de $f$ sur $[-1, 1]$ représenté sur la figure 4.1 devient le motif d'une frise sur $\mathbb{R}$ comme on le voit sur la figure 4.2.
Ainsi prolongée, $f$ est continue sur $[-1, 1]$ sauf en 0 et en 1 où limite à gauche et limite à droite ne coïncident pas. Posons $a_0 = -1$, $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$. Sur $]a_0, a_1[$, la fonction $f$ est constante égale à $-1$ donc se prolonge par continuité en la fonction $-1$ sur $[a_0, a_1]$. Notons, et c'est très important que la valeur de ce prolongement en 0 ne coïncide pas avec la valeur de $f$ en 0. Sur $]a_1, a_2[$, la fonction $f$ est constante égale à 1 donc se prolonge par continuité en la fonction 1 sur $[a_1, a_2]$. Là encore, cela ne correspond pas à la valeur $f(1) = f(-1) = -1$.
Au final, $f$ est 2-périodique et continue par morceaux, mais pas continue sur tout $\mathbb{R}$.

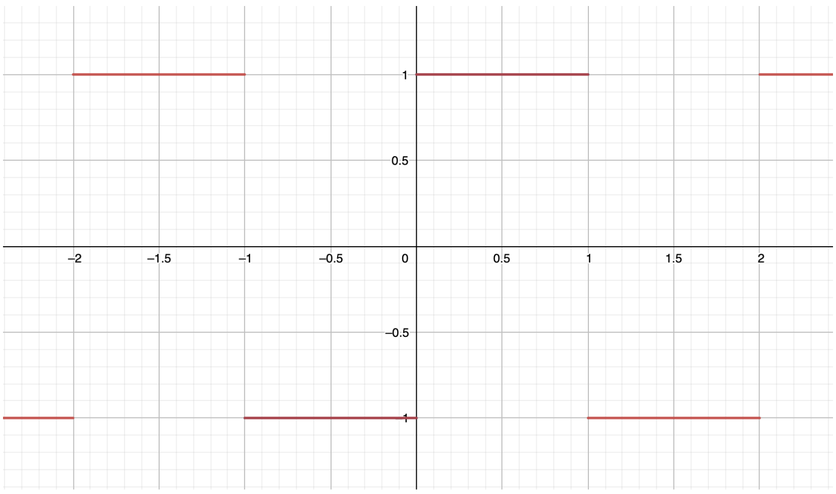


FIGURE 4.2 – Fonction "créneau" sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement, étant donnée une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on peut construire facilement une fonction périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec $f$ sur $[a, b[$.

**Lemme 4.1.1.** Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$. Posons $T = b - a$. Alors il existe une unique fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période $T$ et égale à $f$ sur $[a, b[$.
De plus, $F$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* Dans le plan, on "recopie" le graphe de $f$ entre $a$ et $b$ pour construire une frise sur $\mathbb{R}$ où ce motif est répété. En termes de formules, il suffit de poser

$$F(x) = f(x - TE((x - a)/T)) \tag{4.5}$$

C'est bien défini car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
&E((x-a)/T) \leq (x-a)/T < E((x-a)/T)+1 \\
\Rightarrow\ & TE((x-a)/T) \leq x-a < TE((x-a)/T)+T \\
\Rightarrow\ & a \leq x - TE((x-a)/T) < a+T = b
\end{aligned}$$

C'est $T$-périodique car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
F(x+T) =& f(x+T-TE((x+T-a)/T)) \\
=& f(x+T-TE((x-a)/T+1)) \\
=& f(x+T-TE((x-a)/T)-T) = f(x-TE((x-a)/T)) = F(x)
\end{aligned}$$

C'est égal à $f$ sur $[a,b[$ car $E((x-a)/T)$ est nul pour $x \in [a,b[$ puisque la quantité $(x-a)/T$ est positive et strictement inférieure à un.
Par ailleurs, $F$ est continue sauf aux points $a_i + nT$, où les $a_i$ sont les réels intervenant dans la définition 4.1.2 et où $n \in \mathbb{Z}$. Elle admet toutefois des limites à droite et à gauche en chacun de ces points. Comme un intervalle fermé borné ne rencontre qu'un nombre fini de ces réels, $F$ est continue par morceaux sur tout intervalle fermé borné.
Enfin, l'unicité vient du fait qu'une fonction $T$-périodique est complètement déterminée par sa valeur sur un intervalle de longueur égale à une période comme $[a,b[$. □

Pour résumer ce que nous venons d'expliquer, nous allons désormais travailler avec des fonctions périodiques continues par morceaux. Pour $T > 0$, notons $\mathscr{C}_T$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont $T$-périodiques et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire [1].

Nous allons le munir du produit suivant

$$\forall f \in \mathscr{C}_T,\ \forall g \in \mathscr{C}_T, \qquad (f,g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\bar{g}(t)dt \tag{4.6}$$

qui est bien défini car $f$ et $g$ sont continues sur $[0,T]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, et admettent des limites à droite et à gauche en ces points de discontinuité, donc sont intégrables sur $[0,1]$. On remarquera par ailleurs que la $T$-périodicité entraîne

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathscr{C}_T,\ \forall g \in \mathscr{C}_T, \qquad (f,g) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\bar{g}(t)dt \tag{4.7}$$

1. Autrement dit, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

On pose par ailleurs,

$$\forall f \in \mathscr{C}_T, \qquad \|f\|^2 = (f, f) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt \tag{4.8}$$

Le produit (4.6) est

i) linéaire à gauche : pour tout $f \in \mathscr{C}_T$, $g \in \mathscr{C}_T$, $h \in \mathscr{C}_T$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $(\lambda f + g, h) = \lambda(f, h) + (g, h)$.

ii) antilinéaire à droite : pour tout $f \in \mathscr{C}_T$, $g \in \mathscr{C}_T$, $h \in \mathscr{C}_T$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $(h, \lambda f + g) = \bar{\lambda}(h, f) + (h, g)$.

iii) hermitien : pour tout $f \in \mathscr{C}_T$, $g \in \mathscr{C}_T$, on a $(f, g) = \overline{(g, f)}$.

et (4.8) est

i) positive : pour tout $f \in \mathscr{C}_T$, on a $\|f\| \geq 0$.

ii) définie sur les fonctions continues : pour tout $f \in \mathscr{C}_T$ qu'on suppose de plus continue, on a $\|f\| = 0$ si et seulement si $f$ est la fonction nulle.

Justifions rapidement le dernier point. Si $f$ est continue et vérifie $\|f\| = 0$, alors la fonction $t \mapsto |f(t)|^2$ est continue positive et d'intégrale nulle sur $[0, T]$. Elle est donc nulle sur $[0, T]$ par les propriétés de l'intégrale. Par $T$-périodicité, elle est nulle sur $\mathbb{R}$.
Cela fait de $\|\ \|$ une *semi-norme* sur $\mathscr{C}_T$.
*Remarque.* Il existe des fonctions $f$ de $\mathscr{C}_T$ qui vérifient $\|f\| = 0$ mais ne sont pas nulles. Par exemple, la fonction 1-périodique

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.9}$$

C'est pour cela que $\|\ \|$ est une semi-norme et non pas une norme.

Une propriété capitale des fonctions $e_n$ définies en (4.2) est donnée dans le lemme suivant.

**Lemme 4.1.2.** La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall p \in \mathbb{Z}, \qquad (e_n, e_p) = \delta_{n,p}$$

où $\delta_{n,p}$ vaut 1 si $n = p$, et 0 sinon (symbole de Kronecker).

*Démonstration.* C'est un calcul direct. Pour $n \neq p$,

$$\begin{aligned}(e_n, e_p) &= \frac{1}{T}\int_0^T e_n(t)\bar{e}_p(t)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(n-p)\omega t}dt \\ &= \frac{1}{iT(n-p)\omega}\left[e^{i(n-p)\omega t}\right]_0^T = 0\end{aligned}$$

et pour $n = p$, on intègre la fonction constante $1/T$ entre 0 et $T$, ce qui donne bien la valeur 1. □

On en déduit des relations similaires pour les familles de sinus et cosinus.

**Lemme 4.1.3.** Les familles $(\cos(n\omega t))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n\omega t))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

i) $(\cos(n\omega t), \cos(p\omega t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p = 0 \\ 1/2 & \text{si } n = p > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

ii) $(\cos(n\omega t), \sin(p\omega t)) = 0.$

iii) $(\sin(n\omega t), \sin(p\omega t)) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = p > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En particulier, les familles de cosinus et de sinus sont orthogonales.

*Démonstration.* On utilise les formules inverses de (4.2), à savoir

$$\cos(n\omega t) = \frac{e_n(t) + e_{-n}(t)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(n\omega t) = \frac{e_n(t) - e_{-n}(t)}{2i}$$

et les propriétés de linéarité à gauche et antilinéarité à droite du produit pour se ramener au lemme 4.1.2.
Ainsi,

$$\begin{aligned}(\cos(n\omega t), \cos(p\omega t)) &= ((e_n + e_{-n})/2, (e_p + e_{-p})/2) \\ &= 1/4[(e_n, e_p) + (e_n, e_{-p}) + (e_{-n}, e_p) + (e_{-n}, e_{-p})] \\ &= 1/4(\delta_{n,p} + \delta_{n,-p} + \delta_{-n,p} + \delta_{-n,-p})\end{aligned}$$

d'où i) puisque $n$ et $p$ éléments de $\mathbb{N}$ impliquent que $n = -p$ n'est possible que pour $n = p = 0$. De même,

$$\begin{aligned}(\cos(n\omega t), \sin(p\omega t)) &= ((e_n + e_{-n})/2, (e_p - e_{-p})/2i) \\ &= -1/4i[(e_n, e_p) - (e_n, e_{-p}) + (e_{-n}, e_p) - (e_{-n}, e_{-p})] \\ &= i/4(\delta_{n,p} - \delta_{n,-p} + \delta_{-n,p} - \delta_{-n,-p})\end{aligned}$$

qui entraîne ii). Enfin,

$$\begin{aligned}(\sin(n\omega t), \sin(p\omega t)) &= ((e_n - e_{-n})/2i, (e_p - e_{-p})/2i) \\ &= 1/4[(e_n, e_p) - (e_n, e_{-p}) - (e_{-n}, e_p) + (e_{-n}, e_{-p})] \\ &= 1/4(\delta_{n,p} - \delta_{n,-p} - \delta_{-n,p} + \delta_{-n,-p})\end{aligned}$$

qui entraîne iii). □

Nous finissons cette section par l'équivalent, pour le produit ( , ), du théorème de Pythagore.

**Proposition 4.1.1.** Soient $f \in \mathscr{C}_T$ et $g \in \mathscr{C}_T$ deux fonctions telles que $f - g$ et $g$ sont orthogonales. Alors on a

$$\|f\|^2 = \|f - g\|^2 + \|g\|^2$$

*Démonstration.* On utilise les propriétés de linéarité de ( , ).

$$\begin{aligned}\|f\|^2 =&\|f - g + g\|^2 = (f - g + g, f - g + g)\\ =&(f - g, f - g) + (f - g, g) + (g, f - g) + (g, g)\\ =&\|f - g\|^2 + \|g\|^2\end{aligned}$$

car $(f - g, g) = (g, f - g) = 0$ par hypothèse. □

## 4.2 Coefficients et séries de Fourier.

Dans cette section, nous allons construire la série de Fourier d'une fonction de $\mathscr{C}_T$. Les problèmes de convergence de la série seront traités en section 4.3. Nous verrons que la définition des coefficients de cette série répond à un problème de minimisation pour la semi-norme $\| \, \|$. Pour l'introduire, nous avons besoin d'un peu de vocabulaire.

**Définition 4.2.1.** On appelle *polynôme trigonométrique de degré $N$* une fonction

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$$

où les coefficients $c_n$ sont des nombres complexes avec $c_N$ ou $c_{-N}$ non nul.

On a le résultat important suivant. On notera que le même résultat est vrai pour les polynômes standard.

**Lemme 4.2.1.** Soient $P$ et $Q$ deux polynômes trigonométriques. Alors ils sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

*Démonstration.* Soit $P = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e_n$. Par linéarité à gauche du produit ( , ), on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$(P, e_k) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n(e_n, e_k) = \begin{cases} c_k & \text{si } -N \leq k \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

par le lemme 4.1.2.

Si $Q = \sum_{n=-N'}^{n=N'} c'_n e_n$ est égal à $P$, on a donc pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{matrix} c'_k & \text{si } -N' \leq k \leq N' \\ 0 & \text{sinon} \end{matrix}\right\} = (Q, e_k) = (P, e_k) = \begin{cases} c_k & \text{si } -N \leq k \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $P$ et $Q$ ont même degré et mêmes coefficients. □

On peut par ailleurs écrire un polynôme trigonométrique de degré $N$ en sinus et cosinus en utilisant la formule (4.2)

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(t) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=-N}^{N} i c_n \sin(n\omega t) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n + c_{-n}) \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{N} i(c_n - c_{-n}) \sin(n\omega t) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Inversement, partant d'un polynôme trigonométrique écrit en sinus et cosinus, on peut revenir à une écriture en $e_n$

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega t) &+ \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(n\omega t) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e_n(t) + \sum_{n=-N}^{-1} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e_n(t) \end{aligned} \tag{4.11}$$

On peut résumer tout cela dans le lemme suivant.

**Lemme 4.2.2.** Soient $(c_n)$ les coefficients complexes (c'est-à-dire en $e_n$) d'un polynôme trigonométrique et soient $(a_n)$ et $(b_n)$ ses coefficients réels (c'est-à-dire en cosinus et en sinus). Alors,

i) $a_0 = c_0$.

ii) $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ pour tout $n$ compris entre 1 et $N$.

iii) $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$ pour tout $n$ compris entre 1 et $N$.

Il résulte également du lemme 4.2.1 et des formules (4.10) et (4.11) que deux polynômes trigonométriques sont égaux si et seulement si leurs coefficients réels sont égaux.

Nous définissons maintenant les coefficients de Fourier d'une fonction $f$. Le théorème 4.2.1 justifiera les formules données en montrant que les polynômes trigonométriques ayant ces coefficients sont les meilleures approximations à degré fixé de $f$ pour la semi-norme $\|\ \|$.

**Définition 4.2.2.** Soit $f$ une fonction de $\mathscr{C}_T$.

i) On appelle *coefficients de Fourier complexes de f* les nombres complexes $c_n(f)$ définis pour $n \in \mathbb{Z}$ par la formule

$$c_n(f) = (f, e_n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \tag{4.12}$$

ii) On appelle *coefficients de Fourier réels de f* les nombres complexes $a_n(f)$ et $b_n(f)$ définis pour $n \in \mathbb{N}$ par les formules

$$a_0(f) = c_0(f) = (f, e_0) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \qquad \text{et} \qquad b_0(f) = 0 \tag{4.13}$$

et, pour $n > 0$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= 2(f, \cos(n\omega t)) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \\ b_n(f) &= 2(f, \sin(n\omega t)) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt \end{aligned} \tag{4.14}$$

*Remarque.* Dans certains livres, le coefficient $a_0(f)$ est défini comme étant égal à $2c_0(f)$. Cela permet d'avoir les formules (4.14) valables aussi en $n = 0$, mais au prix d'un développement en série de Fourier d'une fonction $f$ commençant par $a_0(f)/2$. La morale est qu'il faut bien penser à vérifier les définitions des coefficients de Fourier de chaque référence que vous utilisez.

On tire immédiatement du lemme 4.2.2 la relation entre coefficients réels et complexes.

**Lemme 4.2.3.** Soit $f \in \mathscr{C}_T$. Alors ses coefficients réels et complexes vérifient les relations

i) $a_0(f) = c_0(f)$.

ii) $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$ pour tout $n \geq 1$.

iii) $c_n(f) = \dfrac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}$ et $c_{-n}(f) = \dfrac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

On prendra garde à la terminologie. Les coefficients de Fourier réels d'une fonction à valeurs réelles sont des nombres réels, comme le montrent immédiatement les formules (4.13) et (4.14). Mais lorsque $f$ est à valeurs complexes, ce sont des nombres complexes ! [2] On a en fait

2. La même remarque s'applique au lemme 4.2.2. Les coefficients réels qui y sont définis sont des nombres complexes.

**Lemme 4.2.4.** Soit $f \in \mathscr{C}_T$. On suppose $f$ à valeurs réelles. Alors

i) Les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont tous réels.

ii) Les coefficients $c_n(f)$ vérifient

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$

*Démonstration.* Nous avons déjà montré le i). Si $f$ est à valeurs réelles, elle est égale à sa conjuguée et on a

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{in\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)e^{-in\omega t}}dt = \overline{c_n(f)}$$

□

*Exemple.* Calculons les coefficients de Fourier réels de la fonction créneau $f$ représentée en figure 4.2. On a d'abord

$$a_0(f) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}(-1)dt + \int_0^1 1dt\right) = 0$$

Ensuite, pour $n > 0$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)dt = \left(\int_{-1}^{0}(-\cos(n\pi t))dt + \int_0^1 \cos(n\pi t)dt\right) \\ &= \left[\frac{-\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 \\ &= \frac{-\sin(n\pi) + \sin(n\pi)}{n\pi} = 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

et

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \int_{-1}^{1} f(t)\sin(n\pi t)dt = \left(\int_{-1}^{0}(-\sin(n\pi t))dt + \int_0^1 \sin(n\pi t)dt\right) \\ &= \left[\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{-\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 \\ &= \frac{1 - \cos(n\pi) - \cos(n\pi) + 1}{n\pi} \\ &= \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Posons, pour $N \geq 0$, $f \in \mathscr{C}_T$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S_N(f)(t) &= \sum_{n=-N}^{n=N} c_n(f)e_n(t) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{N} b_n(f)\sin(n\omega t) \end{aligned} \tag{4.17}$$

et

$$\begin{aligned} S(f)(t) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(f)e_n(t) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(n\omega t) \end{aligned} \tag{4.18}$$

**Définition 4.2.3.** Soit $f \in \mathscr{C}_T$. La série de Fourier de $f$ est la série $S(f)$ définie en (4.18). Les sommes partielles de cette série sont définies en (4.17).

Nous étudierons la convergence de la série de Fourier vers $f$ en section 4.3. Mais avant cela, il nous faut comprendre pourquoi les coefficients de cette série ont été définis ainsi. Il s'agit ici d'un problème d'approximation. Pour que la série de Fourier converge vers la fonction $f$, il faut s'assurer que les coefficients soient choisis de telle sorte que les sommes partielles forment une bonne approximation de $f$.

Pour mesurer la distance entre $f$ et ses sommes partielles, nous utilisons la semi-norme $\| \, \|$. En fait, les coefficients de Fourier ont été choisis pour minimiser la quantité $\|f - S_N(f)\|$. En termes plus précis,

**Théorème 4.2.1.** Soit $f$ un élément de $\mathscr{C}_T$. Soit $N \geq 0$. Soit $P$ un polynôme trigonométrique de degré au plus $N$. Alors

$$\|f - P\| \geq \|f - S_N(f)\| \tag{4.19}$$

De plus, il y a égalité dans (4.19) si et seulement si $P$ est égal à $S_N(f)$.

Ainsi, $S_N(f)$ est la meilleure approximation de $f$ parmi les polynômes trigonométriques de degré au plus $N$ lorsqu'on mesure la distance entre fonctions via la semi-norme $\| \, \|$. On parle de meilleure approximation *en moyenne quadratique*.

*Démonstration.* Soit $k$ compris entre $-N$ et $N$. Calculons

$$(f - S_N(f), e_k) = (f, e_k) - (S_N(f), e_k) = (f, e_k) - c_k(f) = 0$$

par (4.12). Ainsi $f - S_N(f)$ est orthogonal à tous les $e_k$ pour $k$ compris entre $-N$ et $N$. Par linéarité du produit, $f - S_N(f)$ est orthogonal à tout polynôme trigonométrique de degré au plus $N$. En conséquence, pour tout $P$ trigonométrique de degré au plus $N$, comme la différence $S_N(f) - P$ est un polynôme trigonométrique de degré au plus $N$, elle est orthogonale à $f - S_N(f)$ et on peut appliquer la proposition 4.1.1. On obtient

$$\|f - P\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f) - P\|^2 \tag{4.20}$$

ce qui montre l'inégalité (4.19). De plus, on a égalité si et seulement $\|S_N(f) - P\|$ est nul, c'est-à-dire, puisque $S_N(f) - P$ est continue, si et seulement si $P$ est égal à $S_N(f)$. □

*Exemple.* Les coefficients de la série de Fourier de la fonction créneau $f$ représentée sur la figure 4.2 ont été calculés en (4.15) et (4.16). La série de Fourier associée est la série

$$S(f)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\sin((2n+1)\pi t)}{(2n+1)\pi}$$

La somme partielle correspondant à $N = 9$ (quatre premiers termes) est représentée sur la figure 4.3. On pourra comparer à la figure 4.2.

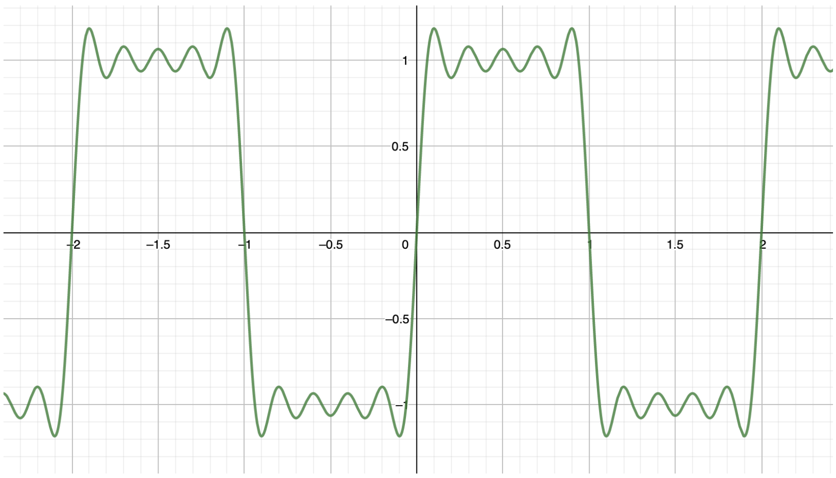


FIGURE 4.3 – Approximation de Fourier ($N = 9$) de la fonction "créneau".

Et la somme partielle correspondant à $N = 25$ (douze premiers termes) est représentée sur la figure 4.4. Toujours à comparer à la figure 4.2.

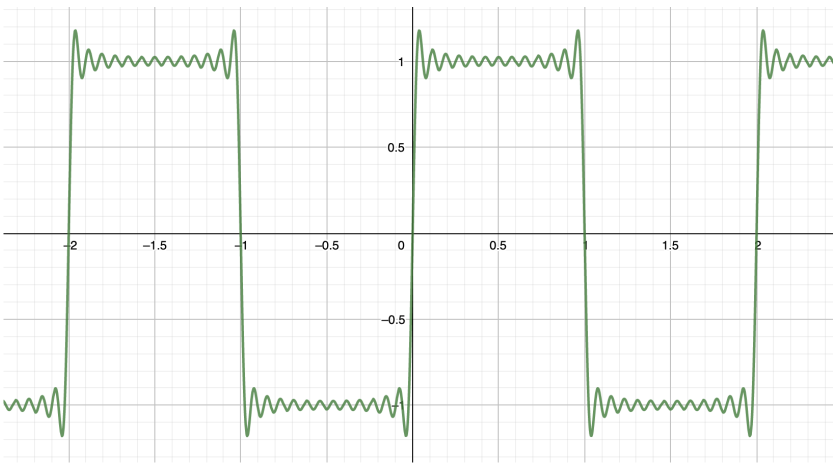


FIGURE 4.4 – Approximation de Fourier ($N = 25$) de la fonction "créneau".

Nous finissons cette section en démontrant l'inégalité de Bessel, un premier résultat de convergence qui fait le lien avec la section 4.3.

**Théorème 4.2.2. Inégalité de Bessel.** Soit $f$ une fonction de $\mathscr{C}_T$. Alors la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

converge et vérifie l'inégalité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq ||f||^2 \tag{4.21}$$

*Démonstration.* On a vu dans la preuve du théorème 4.2.1 que $f - S_N(f)$ est orthogonal à tout polynôme trigonométrique de degré au plus $N$, donc en particulier orthogonal à $S_N(f)$. La proposition 4.1.1 permet d'écrire

$$||f||^2 = ||f - S_N(f)||^2 + ||S_N(f)||^2 \tag{4.22}$$

Mais on a, en utilisant la linéarité de ( , ),

$$||S_N(f)||^2 = (S_N(f), S_N(f)) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n(f)\overline{c_n(f)}(e_n, e_n) = \sum_{n=-N}^{n=N} |c_n(f)|^2$$

d'où, par (4.22),

$$\sum_{n=-N}^{n=N} |c_n(f)|^2 \leq ||f||^2 \tag{4.23}$$

Appelons $C_N$ le membre de gauche de (4.23). La suite $(C_N)_{N\geq 0}$ est croissante et majorée par $||f||^2$. Elle converge donc. En passant à la limite sur (4.23), on obtient l'inégalité de Bessel. □

**Corollaire 4.2.1.** Soit $f$ une fonction de $\mathscr{C}_T$. Alors ses coefficients de Fourier $c_n(f)$, $c_{-n}(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ tendent vers zéro quand $n$ tend vers $+\infty$.

*Démonstration.* Le théorème 4.2.2 implique que les séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f)| \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} |c_{-n}(f)|$$

convergent, donc leur terme général tend vers 0. En utilisant le lemme 4.2.3, on en déduit que les suites $(a_n(f))$ et $(b_n(f))$ tendent également vers zéro. □

## 4.3 Théorèmes de Dirichlet et convergence des séries de Fourier.

Dans cette section, nous étudions la convergence de la série de Fourier $S(f)$ vers $f$, en particulier les deux théorèmes de Dirichlet.

Il y a deux problèmes bien distincts mais que l'on traitera ici simultanément. D'une part, il faut déterminer quand la série de Fourier converge. D'autre part, lorsqu'elle converge, il faut s'assurer qu'elle converge bien vers $f$ et non vers une autre fonction.

Par ailleurs, comme vous l'avez vu dans le cours d'Analyse 2, il y a différentes notions de convergence pour une série de fonctions. On utilisera ici la convergence simple et la convergence normale. Voilà ce que cela donne.

**Définition 4.3.1.** Soit $f \in \mathscr{C}_T$. On dit que la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$

i) *converge simplement en un point* $t \in \mathbb{R}$ si la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n(t)$$

converge, c'est-à-dire si la suite $(S_N(f)(t))$ des sommes partielles évaluées en $t$ converge quand $N \to +\infty$.

ii) *converge normalement sur* $\mathbb{R}$ si la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$$

converge, c'est-à-dire si la suite

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|$$

des sommes partielles converge quand $N \to +\infty$.

Pour faire le lien avec la définition classique de convergence normale d'une série de fonctions, notons que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |c_n(f)e_n(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |c_n(f)e^{in\omega t}| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |c_n(f)| = |c_n(f)|$$

Rappelons également que, si une série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$, elle converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$. Une série normalement convergente a donc une somme bien définie.

**Définition 4.3.2.** Soit $f \in \mathscr{C}_T$. On dit que la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}$ *vers* $f$ si elle converge normalement sur $\mathbb{R}$ et si sa somme est égale à $f$ sur $\mathbb{R}$.

Nous allons démontrer deux théorèmes de Dirichlet, le premier portant sur la convergence simple de la série de Fourier, le deuxième sur la convergence normale. Pour ces résultats, il faut plus que de la continuité par morceaux.

Rappelons qu'une fonction est $C^1$ sur un intervalle $I$ si elle est continue, dérivable, et à dérivée continue. On définit par analogie avec la définition 4.1.2.

**Définition 4.3.3.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que $f$ est $C^1$ *par morceaux* sur $I$ si, en restriction à tout intervalle fermé borné $[a, b]$ inclus dans $I$, il existe un nombre fini de réels

$$a_0 = a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$

tels que, pour tout $0 \leq i \leq n-1$, la restriction de $f$ à $]a_i, a_{i+1}[$ se prolonge en une fonction $C^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Si $f$ est $T$-périodique, elle est $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle vérifie la condition de la définition 4.3.3 sur un intervalle fermé borné de longueur $T$. On prendra garde au fait qu'une fonction $C^1$ par morceaux est continue par morceaux mais n'est pas forcément continue. Ainsi la fonction créneau de la figure 4.2 n'est pas continue mais est $C^1$ par morceaux.

**Théorème 4.3.1. Théorème de Dirichlet.** Soit $f$ une fonction de $\mathscr{C}_T$. On suppose de plus que $f$ est de classe $C^1$ par morceaux. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors,

i) Si $f$ est continue en $t_0$, la série de Fourier $S(f)$ converge simplement en $t_0$ vers $f(t_0)$.
ii) Si $f$ n'est pas continue en $t_0$, la série de Fourier $S(f)$ converge simplement en $t_0$ vers la quantité
$$\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$
où $f(t_0^+)$ (resp. $f(t_0^-)$) est la limite à droite (resp. gauche) de $f$ en $t_0$.

**Corollaire 4.3.1.** On suppose de plus $f$ continue. Alors la série de Fourier $S(f)$ converge simplement vers $f$ sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* Quitte à remplacer $f$ par la fonction $t \mapsto f(t/\omega)$, on peut supposer que $f$ est $2\pi$-périodique. Quitte à remplacer $f$ par la translatée $t \to f(t + t_0)$, on peut supposer que $t_0 = 0$.
Posons alors
$$s_N := S_N(f)(0) = \sum_{-N}^{N} c_n(f)$$

Il faut montrer que la suite

$$u_N := s_N - \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$$

tend vers 0 quand $N \to +\infty$. Nous avons

$$\begin{aligned} 2\pi s_N &= \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \qquad \text{car } c_n = (f, e^{int}) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_N(t)dt \qquad \text{où } K_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int}. \end{aligned}$$

En utilisant les séries géométriques, nous pouvons calculer $K_N$ (cf. exercice 5.4.6) et montrer que

$$K_N(t) = \frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)}$$

On observera que cette expression est équivalente en 0 au quotient de $(2N+1)t/2$ par $t/2$, donc se prolonge par continuité en 0 en avec pour valeur $2N+1$. Comme $K_N(t)$ est une fonction paire, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_N(t)dt &= \int_{-\pi}^{0} f(t)K_N(t)dt + \int_{0}^{\pi} f(t)K_N(t)dt \\ &= -\int_{\pi}^{0} f(-u)K_N(-u)du + \int_{0}^{\pi} f(t)K_N(t)dt \quad \text{en posant } u = -t \\ &= \int_{0}^{\pi} f(-u)K_N(u)du + \int_{0}^{\pi} f(t)K_N(t)dt \quad \text{par parité de } K_N \\ &= \int_{0}^{\pi} (f(-t) + f(t))K_N(t)dt \end{aligned}$$

Nous déduisons de l'égalité

$$\int_0^{\pi} K_N(t)dt = \sum_{n=-N}^{N} \int_0^{\pi} e^{int}dt = \pi$$

que

$$\int_0^{\pi} (f(0^+) + f(0^-))K_N(t)dt = (f(0^+) + f(0^-))\pi = 2\pi \, \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$$

et finalement

$$2\pi u_N = \int_0^{\pi} g(t) \sin((2N+1)t/2)dt \tag{4.24}$$

où
$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t) - f(0^+) - f(0^-)}{\sin(t/2)} \tag{4.25}$$
Pour $t$ appartenant à $]0, \pi]$, le dénominateur ne s'annule pas et la fonction $g$ est continue par morceaux comme quotient d'une fonction continue par morceaux par une fonction continue. En effet, en tout point non nul où $f$ et $t \mapsto f(-t)$ sont continues, le théorème 3.2.1 montre la continuité de $g$. Et en tout point non nul, le théorème 1.1.1 montre que $g$ admet des limites à droite et à gauche finies. Montrons que $g$ est continue à droite en 0.
$$g(t) = \left(\frac{f(t) - f(0^+)}{t} + \frac{f(-t) - f(0^-)}{t}\right)\frac{t}{\sin(t/2)} \tag{4.26}$$
Comme $f$ est $C^1$ par morceaux, le premier terme tend vers la dérivée à droite en 0 ; le second est la dérivée à droite de $t \mapsto f(-t)$ (c'est-à-dire moins la dérivée à gauche de $f$) en 0 et le dernier terme est équivalent à 2 car $\sin t/2$ est équivalent en 0 à $t/2$. Ainsi $g$ se prolonge par continuité en 0.
De même, $g$ est définie et continue par morceaux sur $[-\pi, 0[$ via la formule (4.25) et se prolonge par continuité à gauche en 0 en passant à la limite à gauche sur la formule suivante analogue à (4.26)
$$g(t) = \left(\frac{f(t) - f(0^-)}{t} + \frac{f(-t) - f(0^+)}{t}\right)\frac{t}{\sin(t/2)} \tag{4.27}$$
Autrement dit, la fonction $g$ définie sur $[-\pi, \pi]$ privé de 0 par (4.25) et étendu en 0 en posant par exemple $g(0) = 0$ est continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. Posons alors
$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad g_1(t) = g(t)\cos(t/2) \qquad \text{et} \qquad g_2(t) = g(t)\sin(t/2)$$
et étendons $g_1$ et $g_2$ en des fonctions de $\mathscr{C}_{2\pi}$ grâce au lemme 4.1.1. Notons que $g_1(-t) = -g_1(t)$ et $g_2(-t) = g_2(t)$ pour tout $t \in ]-\pi, \pi[$.
Calculons à partir de l'expression (4.24)
$$\begin{aligned} 2\pi u_N &= \int_0^\pi g(t)\sin((2N+1)t/2)dt \\ &= \int_0^\pi g(t)(\sin(Nt)\cos(t/2) + \cos(Nt)\sin(t/2))dt \\ &= \int_0^\pi g_1(t)\sin(Nt)dt + \int_0^\pi g_2(t)\cos(Nt)dt \end{aligned} \tag{4.28}$$
Mais, en faisant le changement de variables $u = -t$, on a
$$\int_0^\pi g_1(t)\sin(Nt)dt = \int_{-\pi}^0 g_1(-u)\sin(-Nu)du = \int_{-\pi}^0 g_1(u)\sin(Nu)du$$

et

$$\int_0^{\pi} g_2(t)\cos(Nt)dt = \int_{-\pi}^{0} g_2(-u)\cos(-Nu)du = \int_{-\pi}^{0} g_2(u)\cos(Nu)du$$

Reprenons le calcul (4.28)

$$\begin{aligned}2\pi u_N &= \int_0^{\pi} g_1(t)\sin(Nt)dt + \int_0^{\pi} g_2(t)\cos(Nt)dt\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} g_1(t)\sin(Nt)dt + \int_{-\pi}^{\pi} g_2(t)\cos(Nt)dt\right)\\ &= \pi(b_N(g_1) + a_N(g_2))\end{aligned}$$

On déduit du corollaire 4.2.1 que la suite $(u_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. □

Passons maintenant à la convergence normale.

**Théorème 4.3.2. Théorème de convergence normale de Dirichlet.** Soit $f$ une fonction $T$-périodique continue et de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. La série de Fourier $S(f)$ converge normalement vers $f$.

Avant de démontrer ce théorème, nous allons démontrer le lemme suivant.

**Lemme 4.3.1.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue, $T$-périodique et de classe $C^1$ par morceaux. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$c_n(f') = i\omega n c_n(f)$$

*Preuve du Lemme 4.3.1.* Si $n = 0$, on a

$$c_0(f') = \frac{1}{T}\int_0^T f'(t)dt = \frac{1}{T}(f(T) - f(0)) = 0$$

Sinon, on intègre par parties et on obtient

$$\begin{aligned}c_n(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt\\ &= \frac{-1}{in\omega T}\left[f(t)e^{-in\omega t}\right]_0^T + \frac{1}{in\omega T}\int_0^T f'(t)e^{-in\omega t}dt\end{aligned}$$

Comme $f$ est $T$-périodique, $\left[f(t)e^{-i\omega nt}\right]_0^T = 0$. Nous en déduisons le résultat. □

*Preuve du Théorème 4.3.2.* En utilisant le lemme, nous en déduisons que, pour tout $n > 0$,

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f')|}{\omega|n|} = 2|c_n(f')|\frac{1}{2\omega|n|}$$

Pour tout $a \geq 0$ et tout $b \geq 0$,

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

Ainsi, nous en déduisons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul,

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f')|^2 + \left(\frac{1}{2\omega n}\right)^2$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge et que la série de terme général $|c_n(f')|^2$ converge par l'inégalité de Bessel appliquée à $f'$, on a convergence de la série $\sum_{n>0} |c_n(f)|$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul,

$$|c_{-n}(f)| \leq |c_{-n}(f')|^2 + \left(\frac{1}{2\omega n}\right)^2$$

et le même raisonnement montre que la série $\sum_{n>0} |c_{-n}(f)|$ converge.
Ceci nous donne la convergence normale de la série de Fourier. De plus, par le théorème 4.3.1, la somme de la série de Fourier est $f$. □

*Remarque.* Les deux théorèmes de Dirichlet n'ont pas le même statut. Le théorème 4.3.1 est fondamental car, en plus de la convergence simple, il donne la valeur de la somme de la série de Fourier. On peut difficilement s'en passer. Le théorème 4.3.2 est souvent peu utile en pratique, la convergence normale pouvant s'obtenir directement par les critères classiques de convergence type Riemann.

## 4.4 Egalité de Parseval.

Dans cette dernière section, nous reprenons l'étude de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$.

**Théorème 4.4.1. Egalité de Parseval.** Soit $f$ une fonction de $\mathscr{C}_T$. Nous avons

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = ||f||^2$$

*Remarque.* Rappelons que l'inégalité de Bessel nous dit que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq ||f||^2$$

*Démonstration.* On va faire la preuve **sous l'hypothèse supplémentaire que $f$ est de classe $C^1$.**

Commençons par

**Lemme 4.4.1.** Pour toute fonction $g$ de $\mathscr{C}_T$, on a

$$||g|| \leq ||g||_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)|.$$

*Preuve du lemme 4.4.1.* C'est un calcul direct. On part de

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |g(t)| \leq ||g||_\infty$$

en remarquant que $||g||_\infty$ est bien définie puisque $g$ est bornée sur $\mathbb{R}$. On passe au carré

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |g(t)|^2 \leq ||g||_\infty^2$$

On intègre ensuite cette inégalité sur une période

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T |g(t)|^2 dt &\leq \frac{1}{T}\int_0^T ||g||_\infty^2 dt \\ &\leq \frac{1}{T}\left[||g||_\infty^2 \cdot t\right]_O^T \\ ||g||^2 &\leq ||g||_\infty^2 \end{aligned}$$

□

Le théorème de convergence normale de Dirichlet implique par ailleurs que la série de Fourier converge normalement vers $f$. Ceci entraîne que la suite des sommes partielles $(S_N(f))$ converge uniformément vers $f$, c'est-à-dire $||S_N(f) - f||_\infty$ tend vers 0. Nous déduisons de (4.22) et du lemme 4.4.1 que

$$||f||^2 - ||S_N(f)||^2 = ||S_N(f) - f||^2 \leq ||S_N(f) - f||_\infty^2 \to 0$$

soit

$$||f||^2 = \lim_{N\to\infty} ||S_N(f)||^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Ceci démontre le théorème. □

**Corollaire 4.4.1.** Soient $f$ et $g$ des fonctions appartenant à $\mathscr{C}_T$. Supposons $f$ et $g$ continues et supposons que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(f) = c_n(g)$$

Alors $f = g$.

*Démonstration.* La fonction $f - g$ est également continue et $T$-périodique. Calculons ses coefficients de Fourier. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} c_n(f-g) &= \frac{1}{T}\int_0^T (f-g)(t)e^{-in\omega t}dt \\ &= \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt - \int_0^T g(t)e^{-in\omega t}dt\right) \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= c_n(f) - c_n(g) \\ &= 0 \quad \text{par hypothèse} \end{aligned}$$

Appliquons l'égalité de Parseval à $f - g$. On obtient

$$\|f-g\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f-g)|^2 = 0$$

Comme $\| \ \|$ est définie sur les fonctions continues, on a l'implication

$$\|f-g\| = 0 \Longrightarrow f - g = 0$$

c'est-à-dire $f = g$ comme voulu. □

*Remarque.* Si $f$ et $g$ ont mêmes coefficients de Fourier mais sont seulement continues par morceaux, le corollaire 4.4.1 ne s'applique pas. Par exemple, la fonction définie en (4.9) a tous ses coefficients de Fourier nuls, donc identiques à ceux de la fonction nulle, bien que ce ne soit pas la fonction nulle. Toutefois, on peut montrer que $f$ et $g$ sont égales sur $\mathbb{R}$ privé d'une suite de points.

**Corollaire 4.4.2.** Soit $f$ une fonction continue de $\mathscr{C}_T$.

(i) $f$ est paire si et seulement si tous les coefficients $b_n(f)$ sont nuls.

(ii) $f$ est impaire si et seulement si tous les coefficients $a_n(f)$ sont nuls.

*Démonstration.* Le sens direct de (i) et (ii) est un calcul direct, cf. questions 2 et 3 de l'exercice 5.4.2.
Montrons la réciproque de (i) (cf. question 4 de l'exercice 5.4.2).
Supposons donc que tous les coefficients $b_n(f)$ sont nuls. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = f(-t)$$

On va montrer que $f$ est égale à $g$. Cela impliquera

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = f(-t)$$

c'est-à-dire $f$ est paire.
Pour cela, calculons les coefficients de Fourier de $g$. On a, pour $n > 0$,

$$\begin{aligned}
a_n(g) &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(-t)\cos(n\omega t)dt \\
&= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(u)\cos(n\omega u)du \quad \text{en posant } u = -t \\
&= a_n(f)
\end{aligned}$$

et

$$a_0(g) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(u)du = a_0(f)$$

Enfin, pour $n > 0$, on a de même

$$\begin{aligned}
b_n(g) &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(-t)\sin(n\omega t)dt \\
&= \frac{-2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(u)\sin(n\omega u)du \quad \text{en posant } u = -t \\
&= -b_n(f) = 0 \quad \text{par hypothèse}
\end{aligned}$$

Mais ceci implique que les coefficients de Fourier complexes de $f$ et de $g$ sont égaux. On applique le corollaire 4.4.1 et on en déduit que $f$ et $g$ sont égales, i.e. que $f$ est paire.

Montrons la réciproque de (ii) par un raisonnement similaire.
On suppose que tous les coefficients $a_n(f)$ sont nuls. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = -f(-t)$$

On va montrer que $f$ est égale à $h$. Cela impliquera

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = -f(-t)$$

c'est-à-dire $f$ est impaire.
Pour cela, calculons les coefficients de Fourier de $g$. On a, pour $n > 0$,

$$\begin{aligned}
a_n(h) &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (-f(-t))\cos(n\omega t)dt \\
&= \frac{-2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(u)\cos(n\omega u)du = -a_n(f) = 0
\end{aligned}$$

et on montre de même que $a_0(h)$ est nul. Enfin, pour $n > 0$,

$$b_n(h) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(u)\sin(n\omega u)du = b_n(f)$$

Mais ceci implique que les coefficients de Fourier complexes de $f$ et de $h$ sont égaux. On applique le corollaire 4.4.1 et on en déduit que $f$ et $h$ sont égales, i.e. que $f$ est impaire. □

# Chapitre 5

# Exercices

## 5.1 Exercices sur le chapitre 1

**Exercice 5.1.1.**

1. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x+5$. En revenant à la définition, montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = 5$.
2. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2+1$. En revenant à la définition, montrer que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

**Exercice 5.1.2.** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies dans $I \setminus \{x_0\}$. Soient $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell' \\ \ell' \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\ell'}.$$

2. En déduire que

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell' \\ \ell' \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}.$$

**Exercice 5.1.3.**

1. Traduire à l'aide des quantificateurs la propriété suivante :

"la fonction $f$ ne tend pas vers $\ell$ quand $x$ tend vers $x_0$."

2. En déduire que la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne tend pas vers 0 lorsque $x$ tend vers 0.

**Exercice 5.1.4.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ contenant $x_0$ dans son intérieur. On suppose que $\lim_{x\to x_0} f(x) = u > 0$. Démontrer qu'il existe $t > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < t$ alors $|f(x)| \geq \frac{u}{2}$.

**Exercice 5.1.5.** Écrire les définitions des limites suivantes : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
(On précisera sur quel type d'intervalle la fonction $f$ doit être définie.)

**Exercice 5.1.6.** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.
En revenant à la définition, montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 5.1.7.** Soit $f$ une fonction de variable réelle telle que $\frac{f(x)}{|x|} \to \infty$ quand $x \to \infty$. Montrer que pour tout réel $\alpha$ il existe $X_\alpha$ tel que $f(x) - |\alpha x| \geq |x|$ si $|x| \geq X_\alpha$. En déduire que pour tout $\alpha$ réel $f(x) - \alpha x \to \infty$ quand $x \to \infty$.

**Exercice 5.1.8.** Soit $a$ un point de l'intervalle $I$. Soit $f : I \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. On suppose

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

ii) $f$ est à valeurs strictement positives sur $I \setminus \{0\}$

Montrer que

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

**Exercice 5.1.9.** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+x-1}$ tend vers 1 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 5.1.10.** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x+\cos x}{2x-1}$ tend vers $1/2$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 5.1.11.** Montrer que toute fonction $f$ périodique (c'est-à-dire qu'il existe $T \neq 0$ tel que $f$ soit $T$-périodique) qui admet une limite en $+\infty$ est constante.

**Exercice 5.1.12.** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

1. Soient $a$, $b$ et $\ell$ trois réels. Montrer que
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_a f = b \\ \lim\limits_b g = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_a (g \circ f) = \ell$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_a f = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} g = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_a (g \circ f) = -\infty$$

**Exercice 5.1.13.**

1. Ecrire avec des quantificateurs "La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne tend pas vers 1 en $+\infty$".
2. Donner une formulation équivalente de la phrase précédente qui utilise des suites.
3. Mêmes questions pour "La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne tend pas vers $-\infty$ en $+\infty$".

**Exercice 5.1.14.** Soient $(u_n)$ une suite réelle. On suppose que $(u_n)$ converge vers une limite finie. Montrer que cette limite est unique.
*On pourra supposer l'existence de deux limites $\ell$ et $\ell'$ puis appliquer les deux définitions de limite à* $\epsilon = |\ell - \ell'|/3$.

**Exercice 5.1.15.**

1. Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée par 1. On suppose que $(u_n)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $|\ell| \leq 1$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée par 1. On suppose que $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand $x$ tend vers 0. Montrer que $|\ell| \leq 1$.

**Exercice 5.1.16.**

1. Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles. On suppose
$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$$
Montrer que $(u_n)$ tend vers zéro.

2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions d'une variable réelle. On suppose

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Montrer que $f(x)$ tend vers zéro quand $x$ tend vers zéro.

**Exercice 5.1.17. Extrait de l'examen de rattrapage du 24 juin 2020.**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

1. Montrer en utilisant la définition de limite avec les $\epsilon$ que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer en utilisant la définition de limite avec les $\epsilon$ que $\lim_{x \to +\infty} g \circ f(x) = 1$.
3. Soit $(x_n)$ la suite réelle définie par

$$x_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$$

Montrer que $(x_n)$ est une suite strictement croissante et calculer sa limite.
4. Montrer que $(g(x_n))$ est une suite convergente et calculer sa limite.

## 5.2 Exercices sur le chapitre 2

**Exercice 5.2.1.** Ecrire avec des quantificateurs les énoncés suivants

1. La suite $(u_n)$ est majorée.
2. La suite $(u_n)$ est majorée pour $n$ assez grand.
3. La suite $(u_n)$ est croissante.
4. Il existe une sous-suite qui est minorée.
5. A partir d'un certain rang, la suite $(u_n)$ est dans $[0, 1]$.
6. A partir d'un certain rang, la suite $(u_n)$ est croissante et majorée.

**Exercice 5.2.2.**

1. Soit $u_n = 1/n$. Ecrire deux sous-suites différentes de $u_n$.
2. Soit $v_n = (-1)^n/n$. Trouver une sous-suite croissante (resp. décroissante) et convergente de $v_n$.

3. Trouver deux suites contenues dans $[-1, 1]$ telles que $|u_n - v_n| < 1/n$ mais que $(u_n)$ et $(v_n)$ ne convergent pas.

**Exercice 5.2.3.** Soit $u_n = (-1)^n + 1/n^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\sup(u_n)$.
2. Calculer $\inf(u_n)$.

**Exercice 5.2.4.** Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, une borne inférieure, un plus grand élément, un plus petit élément (si la question se pose) ?

1. $[0, 1[$
2. $\{0\} \cup [1, 2]$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$

**Exercice 5.2.5.** Soit $(u_n)$ une suite minorée.

1. Soit $m$ un minorant de $(u_n)$. Montrer que $(-u_n)$ est majorée par $-m$.
2. En déduire que $\sup(-u_n) = -\inf(u_n)$.

**Exercice 5.2.6.** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles bornées.

1. Comparer $\sup(u_n + v_n)$, $\sup(u_n - v_n)$, $\sup(u_n) + \sup(v_n)$ et $\sup(u_n) - \sup(v_n)$.
2. Comparer $\inf(u_n + v_n)$, $\inf(u_n - v_n)$, $\inf(u_n) + \inf(v_n)$ et $\inf(u_n) - \inf(v_n)$.

**Exercice 5.2.7.** Soit $(u_n)$ une suite réelle. On suppose que $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et respectivement $(u_{3n})$ convergent vers des limites finies $\ell$, $\ell'$ et respectivement $\ell''$.

1. Montrer que $\ell = \ell' = \ell''$.
2. Montrer que $(u_n)$ converge vers $\ell$.

**Exercice 5.2.8.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ des nombres réels. Calculer :

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} |x - a_i| .$$

*On pourra positionner les réels $a_i$ sur une droite graduée et commencer par traiter les cas $n = 1$ et $n = 2$.*

**Exercice 5.2.9.**

1. Montrer que toute sous-suite extraite d'une suite de Cauchy est aussi une suite de Cauchy.
2. Montrer que si $(u_n)$ est une suite de Cauchy, on peut trouver une sous-suite $(u_{n_k})$ de $(u_n)$ telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \geq p,\ |u_{n_p} - u_{n_q}| \leq \frac{1}{2^p}.$$

**Exercice 5.2.10.** Une suite $(x_n)$ est définie par une relation de récurrence $x_{n+1} = a \sin x_n + b$ où $a$ est un nombre réel de $]0,1[$ et $b$ un nombre réel quelconque.

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|x_{p+1} - x_p| \leq a^p |x_1 - x_0|$.
2. En déduire que la suite $(x_n)$ est une suite de Cauchy.
3. Combien de termes faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de $\lim x_n$ à $10^{-10}$ près si on suppose $a = 1/2$, $b = 5$, $x_0 = 1$ ?

**Exercice 5.2.11. Extrait de l'examen du 11 mai 2020.**
Soit $f$ une fonction définie et continue sur le segment $[a,b]$ et telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$.

Soit $u_0 \in [a,b]$. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = f(u_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

1. On suppose que $f$ est croissante. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit
   (a) croissante et majorée par $b$
   (b) décroissante et minorée par $a$
   (c) constante ($u_n = u_0, \forall n \in \mathbb{N}$).
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell$ qui vérifie $f(\ell) = \ell$.
3. On suppose $f$ décroissante. Montrer que $f \circ f$ est croissante et que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
4. On suppose de plus qu'il existe un unique $\ell \in [a,b]$ tel que $f(\ell) = \ell$. Montrer que $(u_n)$ converge vers $\ell$.
   *On demande d'écrire l'argument complet qui utilise la définition de limite avec les $\epsilon$.*

## 5.3 Exercices sur le chapitre 3

**Exercice 5.3.1.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$$x \in I \longmapsto \max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$$

et

$$x \in I \longmapsto \min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

1. Montrer que

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}\,(f + g + |f - g|) \quad \text{et} \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}\,(f + g - |f - g|)$$

2. En déduire que si $f$ et $g$ sont continues sur $I$, alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ le sont aussi.

**Exercice 5.3.2.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$. Montrer que $\sup_{x \in I} f(x) \leq M$.

**Exercice 5.3.3.** Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $M \in \mathbb{R}$ un réel tels que, pour tout $x \in I$, on ait $f(x) \leq g(x) \leq M$.

1. Montrer que, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)$.
2. En déduire que $\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)$.
3. On suppose $f$ minorée sur $I$. En raisonnant de façon analogue, montrer que $\inf_{x \in I} f(x) \leq \inf_{x \in I} g(x)$

**Exercice 5.3.4. Extrait de l'examen de rattrapage du 24 juin 2020.**

1. Donner un exemple de suite non croissante qui tende vers $+\infty$.
2. Si $g(x) = \ln x$ et $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, quelles sont les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ ? (On précisera le domaine de définition de chacune de ces fonctions).
3. Montrer que toute fonction strictement monotone sur $\mathbb{R}$ est injective.
4. Donner un exemple de fonction $f$ définie sur $I = [0, 1]$ telle que $f(I)$ soit un intervalle ouvert borné.
5. Soit $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x \in [-1, 1]$ tel que $f(x) = x$.
6. Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

**Exercice 5.3.5.** Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes ($E$ désigne la partie entière) :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_1(0) = 0$ ;
2. $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_2(0) = 0$ ;
3. $f_3(x) = xE(x)$ ;
4. $f_4(x) = E(x) \sin(\pi x)$.

**Exercice 5.3.6.** Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x| \sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \quad \text{si } x \neq 1 \qquad ; \qquad f_3(1) = 1.$$

**Exercice 5.3.7. Extrait de l'examen du 11 mai 2020.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose $f$ continue sur $\mathbb{R}$ et $f$ admettant des limites finies en $\pm\infty$.

On note $\ell$ la limite de $f$ en $+\infty$ et $\ell'$ la limite de $f$ en $-\infty$.

1. Soit $I$ un intervalle fermé borné. Justifier que $f$ est bornée sur $I$.
2. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que
$$\forall x \in [A, +\infty[, \quad \ell - 1/2 \leq f(x) \leq \ell + 1/2$$
3. Montrer qu'il existe $A' > 0$ tel que
$$\forall x \in ]-\infty, -A'], \quad \ell' - 1/2 \leq f(x) \leq \ell' + 1/2$$
4. Montrer que $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 5.3.8.**

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que
$$\forall x \in [0, +\infty[ , \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
2. Montrer qu'on a égalité si, et seulement si, $x = 0$.

**Exercice 5.3.9.** Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[\,, \quad \dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x.$

**Exercice 5.3.10.**

1. Étudier et tracer le graphe de $f : x \mapsto 2(x-1) - \arctan x$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ et que $\alpha \in ]1, \sqrt{3}[$.
3. Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1/2$ et $2u_{n+1} = 2 + \arctan u_n$.
   Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$ et que la suite $(u_n)$ est convergente.
4. Déterminer une valeur de $n$ de sorte que $u_n$ soit une valeur approchée de $\lim u_n$ à $\varepsilon$ près ($\varepsilon$ étant un réel strictement positif fixé).

**Exercice 5.3.11.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f'$ ne s'annule pas. Montrer que $f$ ne peut pas être périodique.

**Exercice 5.3.12. Théorèmes de Rolle à l'infini.**

1. Soit $f$ une fonction continue de $[a, \infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $f$ dérivable sur $]a, \infty[$ et admettant $f(a)$ comme limite en $\infty$. Montrer qu'il existe $c \in ]a, \infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
   *Indication : On pourra considérer la fonction $g(x) = f(a + (x-a)/(b-x))$ pour $b > a$ fixé et lui appliquer le théorème de Rolle.*
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

   Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$

**Exercice 5.3.13.** Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$. Montrer que, si $f$ est continue, alors elle admet un point fixe, c'est-à-dire un point $x_0$ tel que $f(x_0) = x_0$.
*Indication : On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédaires à une fonction bien choisie.*

**Exercice 5.3.14. Une généralisation du théorème des accroissements finis.**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

Soit

$$x \in [a, b] \longmapsto \Delta(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $\Delta$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire qu'il existe $c$ dans $]a, b[$ tel que $(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$.

**Exercice 5.3.15.** Soit $I$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Ecrire la définition (avec les $\epsilon$) de : $f$ est continue en tout point de $I$.
2. Ecrire la définition de : $f$ est uniformément continue sur $I$.
3. On suppose $f$ uniformément continue sur $I$. Montrer que $f$ est continue en tout point de $I$.

**Exercice 5.3.16.**

1. Soient $f$ et $g$ deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $|f|$, $f + g$ et $\lambda f$ sont lipschitziennes.
   (b) On suppose ici que $f$ et $g$ sont $k$-lipschitziennes. Montrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont $k$-lipschitziennes.
2. Montrer qu'une fonction de classe $C^1$ sur $[a, b]$ est lipschitzienne sur $[a, b]$.
3. Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $[\alpha, +\infty[$.
5. Montrer que la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ mais pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.

**Exercice 5.3.17.** Soit $f$ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admettant une limite finie en $+\infty$ ainsi qu'en $-\infty$. Montrer que $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

## 5.4 Exercices sur le chapitre 4

**Exercice 5.4.1.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$, de période $2\pi$, telle que

$$f(x) = x \quad \text{si} \quad x \in [-\pi, \pi[.$$

1. Représenter la fonction $f$ sur l'intervalle $[-2\pi, 4\pi]$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n(f) = 0$.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $b_n(f) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$.
4. Écrire les cinq premiers termes de la série de Fourier associée à $f$.

**Exercice 5.4.2.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $T$-périodique continue par morceaux.

1. Montrer que les coefficients de Fourier complexes $c_n$ de $f$ vérifient $c_{-n} = \bar{c}_n$.
2. On suppose $f$ paire. Montrer que tous les coefficients de Fourier réels $b_n$ sont nuls.
3. On suppose $f$ impaire. Montrer que tous les coefficients de Fourier réels $a_n$ sont nuls.
4. On suppose tous les $c_n$ réels. Que peut-on dire de $f$ ?
5. Que signifie la nullité de $a_0$ ?

**Exercice 5.4.3.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\cos x|$.

1. Représenter la fonction $f$ sur l'intervalle $[-2\pi, 4\pi]$.
2. Vérifier que $f$ est une fonction paire de période $\pi$.
3. Calculer les coefficients de Fourier $b_n(f)$.
4. Calculer $a_0$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos((2n+1)x) + \cos((2n-1)x))\, dx.$$
6. En déduire que
$$a_n(f) = \frac{4\,(-1)^n}{\pi\,(1-4n^2)}.$$
7. Écrire les cinq premiers termes de la série de Fourier associée à $f$.

**Exercice 5.4.4.** Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique telle que
$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$$
pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de $f$.

2. Etudier la convergence de la série de Fourier de $f$.
3. En déduire les valeurs de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

**Exercice 5.4.5.** Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x|$ si $|x| \leq \pi$.

1. Déterminer la série de Fourier de $f$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^4}$.
4. Montrer que $|x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$.

**Exercice 5.4.6. Noyau de Dirichlet et produit de convolution.** On pose, pour $N \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$K_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$$

(noyau de Dirichlet)

1. Montrer que
$$K_N(x) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$
2. Montrer que $K_N$ est paire et $2\pi$-périodique.
3. Montrer que $\int_0^{2\pi} K_N(t)dt = 2\int_0^{\pi} K_N(t)dt = 2\pi$.
4. Soit $f$ une fonction continue $2\pi$-périodique et soit $(S_N)$ la suite des sommes partielles de Fourier de $f$ (complexes). Montrer que
$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_N(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)dt$$

**Exercice 5.4.7.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $2\pi$-périodique, $C^2$ et telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ et, $\forall t \in [0, 2\pi], |f(t)| \geq |f''(t)|$. On note respectivement $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(c''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier (complexes) de $f$ et $f''$.

1. Calculer $c_0$ puis calculer $c''_n$ en fonction de $c_n$.
2. A l'aide du théorème de Parseval, en déduire que $c_n = 0$ pour $|n| \geq 2$.
3. Montrer qu'il existe $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$ tels que $f(t) = \rho \cos(t + \varphi)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

**Exercice 5.4.8. Extrait de l'examen de rattrapage du 24 juin 2020.**

Soit la fonction $f$ définie sur $]-1, 1]$ par $\begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

et étendue à $\mathbb{R}$ par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+2) = f(x)$$

1. Étudier la continuité de $f$.
2. Montrer que $f$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer les coefficients de Fourier complexes de $f$.
4. Calculer les coefficients de Fourier réels de $f$.
5. La série de Fourier de $f$ converge-t-elle vers $f$ en tout point ? *On veillera à donner une réponse complète et argumentée.*

# Table des figures