Université d'Angers

Analyse approfondie

Jean-Baptiste Campesato

Version du 11 juin 2025

Table des matières

1 Un peu de langage

1.1 Ensembles

La notion d'ensemble date de la fin du 19ème siècle et est devenue centrale en mathématiques dès le début du 20ème siècle. Néanmoins, il s'agit d'un concept subtil qu'il n'est pas aisé de définir formellement[1]. Dans ce chapitre, nous abordons les ensembles de façon naïve, intuitive et informelle, ce qui est amplement suffisant pour les cours de mathématiques en licence (et même au-delà).

1.1.1 Définition naïve et notations

Définition 1.1 (Définition naïve)**.** Un *ensemble* est une "collection" bien définie d'éléments (l'ordre de ces éléments n'importe pas). Deux ensembles sont égaux s'ils contiennent les mêmes éléments.

Exemple 1.2. Nous avons l'égalité $\{1,2,2,3\} = \{1,2,3\}$ puisque ces deux ensembles contiennent exactement les éléments 1, 2 et 3.

On définit généralement un ensemble soit en donnant explicitement les éléments qu'il contient (*définition en extension*), par exemple

$$E \coloneqq \left\{\text{pomme}, \pi, 5\right\},$$

ou à partir d'un ensemble déjà défini dont on ne conserve que les éléments vérifiant une propriété donnée (*définition en compréhension*), par exemple l'ensemble des entiers pairs est

$$F \coloneqq \{n \in \mathbb{Z} \ : \ \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k\}.$$

Étant donné un ensemble E, on note $a \in E$ pour signifier que a est un élément de E. On lit *"a appartient à E"*.

Exemple 1.3.
- pomme $\in \left\{\text{pomme}, \pi, 5\right\}$
- banane $\notin \left\{\text{pomme}, \pi, 5\right\}$

Étant donnés deux ensembles E et F, on écrit $E \subset F$ pour signifier que chaque élément de E est aussi un élément de F, i.e. $\forall a \in E,\ a \in F$. On lit *"E est inclus dans F"*, ou *"E est un sous-ensemble de F"*, ou encore *"E est une partie de F"*.

Exemple 1.4. Considérons $B \coloneqq \{4,5,6\}$, $C \coloneqq \{2,4\}$ et $D \coloneqq \{4,5\}$. Alors $D \subset B$ et $C \not\subset B$.

Remarque 1.5. Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $\left(E \subset F \text{ et } F \subset E\right)$. Donc, pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, il suffit de montrer que $E \subset F$ et que $F \subset E$. On parle de raisonnement par *double inclusion*.

Fait 1.6. *Il existe un unique ensemble ne contenant pas d'élément, il s'agit de l'*ensemble vide *qui est dénoté par $\varnothing$.*

[1] Les premières tentatives de définitions ont donné lieu à plusieurs paradoxes. Actuellement, il existe plusieurs *théories axiomatiques* des ensembles ; mais cela dépasse largement le cadre de ce cours.

1.1.2 Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Fait 1.7. *Étant donné un ensemble E, l'ensemble de ses parties est bien défini et se note*

$$\mathcal{P}(E) \coloneqq \{F \ : \ F \subset E\}.$$

Définitions 1.8. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On définit les parties de E suivantes :

- la *réunion* de A et B : $A \cup B \coloneqq \{x \in E,\ (x \in A) \text{ ou } (x \in B)\}$;
- l'*intersection* de A et B : $A \cap B \coloneqq \{x \in E,\ (x \in A) \text{ et } (x \in B)\}$;
- la *différence* de A par B : $A \setminus B \coloneqq \{x \in E,\ (x \in A) \text{ et } (x \notin B)\}$.

Exemple 1.9. Considérons les parties suivantes de $\mathbb{R}$: $C \coloneqq \{2,4\}$ et $D \coloneqq \{4,5\}$.
Alors $C \cup D = \{2,4,5\}$ et $C \cap D = \{4\}$.

Pour $A \subset E$, on note $A^c \coloneqq E \setminus A$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. On dit alors que A^c est le *complémentaire* de A dans E.

Les propriétés suivantes se démontrent facilement en remarquant le lien existant entre les opérations $\cup, \cap, ^c$ et les connecteurs logiques $\vee, \wedge, \neg$.

Proposition 1.10. *Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E.*

★
- $E^c = \varnothing$
- $\varnothing^c = E$
- $(A^c)^c = A$

★
- $A \cup B = B \cup A$ (*commutativité de* $\cup$)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*associativité de* $\cup$ *: on peut simplement écrire* $A \cup B \cup C$)
- $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cup E = E$
- $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

★
- $A \cap B = B \cap A$ (*commutativité de* $\cap$)
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (*associativité de* $\cap$ *: on peut donc simplement écrire* $A \cap B \cap C$)
- $A \cap E = E \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

★ *Lois de De Morgan :*
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

★ *Distributivité :*
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

★
- $A \setminus \varnothing = A$
- $A \setminus A = \varnothing$
- $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B$
- $A \setminus B = A \cap B^c = A \setminus (A \cap B)$

Définition 1.11. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On dit que A et B sont *disjointes* si $A \cap B = \varnothing$.

1.1.3 Produit cartésien

Définition 1.12. Un *n-uplet* est une liste ordonnée de n éléments $(x_1, \dots, x_n)$. On parle de *couple* pour un 2-uplet et de *triplet* pour un 3-uplet.
L'égalité entre n-uplets est caractérisée par la propriété fondamentale suivante :

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n.$$

Remarque 1.13.
- $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$ $\quad$ (*ensembles*)
- $(1,2,3) \neq (3,2,1)$ $\quad$ (*uplets*)

Remarque 1.14.
- $\{1,2,2,3\} = \{1,2,3\}$ $\quad$ (*ensembles*)
- $(1,2,2,3) \neq (1,2,3)$ $\quad$ (*uplets*)

Fait 1.15. *Étant donnés deux ensembles A et B, l'ensemble suivant est bien défini et se nomme le* produit cartésien *de A et B :*

$$A \times B \coloneqq \{(a,b)\ :\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Exemple 1.16. Si $A \coloneqq \{\pi, e\}$ et $B \coloneqq \left\{1, \sqrt{2}, e\right\}$ alors

$$A \times B = \left\{(\pi, 1),\ \left(\pi, \sqrt{2}\right),\ (\pi, e),\ (e, 1),\ \left(e, \sqrt{2}\right),\ (e, e)\right\}.$$

Exemple 1.17.
- $(3, \sqrt{2}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$,
- $(-42, \sqrt{2} + 4i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$,
- $(0,0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$.

Fait 1.18. *Étant donnés des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$, l'ensemble suivant est bien défini*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \coloneqq \{(a_1, a_2, \dots, a_n)\ :\ a_i \in A_i\}.$$

Remarque 1.19. Bien que les ensembles suivants ne soient pas formellement égaux, il est d'usage de les identifier :
- $(A \times B) \times C \ni ((a,b),c)$,
- $A \times (B \times C) \ni (a,(b,c))$,
- $A \times B \times C \ni (a,b,c)$.

1.2 Logique élémentaire

Comme dans la partie concernant les ensembles, l'approche retenue ici n'est pas entièrement rigoureuse. Néanmoins, cette présentation informelle est encore une fois amplement suffisante.

1.2.1 Calcul propositionnel

Définition 1.20 (Définition naïve)**.** Une *proposition* est un énoncé admettant une valeur de vérité, c'est-à-dire qui est soit vrai (V) soit faux (F).

Remarque 1.21. En pratique, on construit une proposition à partir de *propositions élémentaires*[2] à l'aide de *connecteurs propositionnels*. La valeur de vérité d'une proposition dépend alors des valeurs de vérité des propositions élémentaires qui la composent.
Les connecteurs propositionnels usuels sont présentés ci-dessous.

[2]Encore appelées *propositions atomiques* ou *variables propositionnelles*.

Définition 1.22. La *négation* d'une proposition P est la proposition notée $\neg P$ définie par la table de vérité suivante :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Définition 1.23. La *disjonction* de deux propositions P et Q est la proposition notée $P \vee Q$ (ou encore P ou Q) définie par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque 1.24. Attention, la disjonction n'est pas exclusive : si P et Q sont vraies alors $P \vee Q$ l'est aussi.

Définition 1.25. La *conjonction* de deux propositions P et Q est la proposition notée $P \wedge Q$ (ou encore P et Q) définie par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition 1.26. Étant données deux propositions P et Q, on définit la proposition $P \Rightarrow Q$ par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Il s'agit de l'*implication* qui se lit "P implique Q" ou "si P (est vraie) alors Q est (vraie)". On dit alors que P est l'hypothèse et que Q est la conclusion.

Remarque 1.27. On remarque que si P est fausse alors $P \implies Q$ est vraie indépendamment de la valeur de vérité de Q. En anglais, si P est fausse on dit que $P \implies Q$ est *vacuously true*. Par exemple "si $1+1=3$ alors je suis un caméléon" et "si $1+1=3$ alors je ne suis pas un caméléon" sont toutes les deux vraies.
Intuitivement, si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ ne donne pas d'information sur la valeur de vérité de Q, mais si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies alors Q est nécessairement vraie.

Définition 1.28. La *réciproque* de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.

Définition 1.29. Étant données deux propositions P et Q, on définit la proposition $P \Leftrightarrow Q$ par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Il s'agit de l'*équivalence* qui se lit "P est équivalent à Q" ou "P (est vraie) si et seulement si Q (est vraie)".

Définition 1.30. Une *tautologie* est une proposition qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions élémentaires qui la composent. On utilise la notation $\vDash P$ pour indiquer que P est une tautologie.

Définition 1.31. On dit que deux propositions P et Q sont *logiquement équivalentes* si $P \Leftrightarrow Q$ est une tautologie, autrement dit, si P et Q ont même table de vérité.

Exemple 1.32. $P \wedge Q$ est logiquement équivalente à $\neg((\neg P) \vee (\neg Q))$.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$\neg((\neg P) \vee (\neg Q))$	$P \wedge Q$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

Exemple 1.33. $P \Rightarrow Q$ est logiquement équivalente à $(\neg P) \vee Q$.

P	Q	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Exemple 1.34. $P \Leftrightarrow Q$ est logiquement équivalente $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Exemple 1.35 (Principe du tiers exclu)**.** $\vDash P \vee (\neg P)$

P	$\neg P$	$P \vee (\neg P)$
V	F	V
F	V	V

Le principe du tiers exclu signifie que soit P est vraie, soit sa négation $\neg P$ est vraie.

Exemple 1.36 (Modus ponens)**.** $\vDash (P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$	$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Il s'agit de la règle d'inférence principale en mathématiques : si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie.

On démontre facilement la proposition suivante à l'aide de tables de vérité.

Proposition 1.37.
- *La disjonction est commutative :* $\vDash (P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$.
- *La disjonction est associative :* $\vDash ((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$.
- *La conjonction est commutative :* $\vDash (P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
- *La conjonction est associative :* $\vDash ((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$.

Proposition 1.38 (Élimination de la double négation)**.** $\vDash (\neg(\neg P)) \Leftrightarrow P$

Démonstration.

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

■

Proposition 1.39 (Lois de De Morgan)**.**
- *La négation de* $P \vee Q$ *est* $(\neg P) \wedge (\neg Q)$: $\vDash (\neg(P \vee Q)) \Leftrightarrow ((\neg P) \wedge (\neg Q))$.
- *La négation de* $P \wedge Q$ *est* $(\neg P) \vee (\neg Q)$: $\vDash (\neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q))$.

Moyen mnémotechnique : la négation change la conjonction en disjonction et vice-versa.

Démonstration. On démontre seulement la première loi de De Morgan ; la deuxième se démontre de façon similaire.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V

■

Proposition 1.40. *La négation de* $P \Rightarrow Q$ *est* $P \wedge (\neg Q)$.

Démonstration. En effet, d'après Exemple 1.33, $P \Rightarrow Q$ est logiquement équivalent à $(\neg P) \vee Q$. Donc, la négation de $P \Rightarrow Q$ est logiquement équivalente à $\neg((\neg P) \vee Q)$ et donc à $P \wedge (\neg Q)$. ■

Proposition 1.41 (Distributivité)**.**
- $\vDash (P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$
- $\vDash (P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

Proposition 1.42 (Démonstration par contraposition)**.**
La proposition $P \Rightarrow Q$ *est logiquement équivalente à sa* contraposée $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.

Démonstration.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

■

Il peut être plus facile de démontrer $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ plutôt que de démontrer $P \Rightarrow Q$.

Exemple 1.43. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que si n^2 est impair alors n est impair.
On va montrer la contraposée, à savoir que si n est pair alors n^2 est pair.
Supposons que n soit pair alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$ et alors $n^2 = 4k^2$ est pair.

Proposition 1.44 (Reductio ad absurdum)**.** $(((\neg P) \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \Rightarrow (\neg Q))) \Rightarrow P$ *est une tautologie.*

En pratique, pour démontrer P par l'absurde, on suppose que $\neg P$ est vraie et on cherche à en déduire une contradiction, c'est-à-dire à trouver une proposition Q telle que Q et $\neg Q$ soient vraies.

1.2.2 Calcul des prédicats

Définition 1.45. Un *prédicat* $P(x, y, \ldots)$ est un énoncé dont la valeur de vérité dépend des variables $x, y, \ldots$ qu'il contient.

Définition 1.46 (Quantificateur universel)**.** L'énoncé "$\forall x \in E,\ P(x)$" signifie que $P(x)$ est vrai quel que soit x dans l'ensemble E. On lit "pour tout x dans E, $P(x)$ (est vrai)".

Définition 1.47 (Quantificateur existentiel)**.** L'énoncé "$\exists x \in E,\ P(x)$" signifie qu'il existe au moins un x dans l'ensemble E tel que $P(x)$ est vrai. On lit "il existe x dans E tel que $P(x)$ (est vrai)".

Fait 1.48. *La négation de "$\forall x \in E,\ P(x)$" est définie comme "$\exists x \in E,\ \neg P(x)$".*
La négation de "$\exists x \in E,\ P(x)$" est définie comme "$\forall x \in E,\ \neg P(x)$".

Moyen mnémotechnique : la négation échange $\forall$ et $\exists$.

Remarque 1.49. La négation de "toutes les portes sont fermées" est bien "il existe une porte ouverte" (et non pas "toutes les portes sont ouvertes").
Ainsi, la négation formelle des énoncés avec quantificateurs coïncide avec l'intuition.

Une variable quantifiée est *liée* (ou *muette*) :
- on peut remplacer "$\forall x \in E,\ P(x)$" par "$\forall y \in E,\ P(y)$" sans en changer le sens,
- on peut remplacer "$\exists x \in E,\ P(x)$" par "$\exists y \in E,\ P(y)$" sans en changer le sens.

A contrario, une variable non-quantifiée est *libre*.
Un énoncé n'admettant pas de variable *libre* est une proposition au sens où il admet une valeur de vérité.

L'exemple suivant montre que l'on ne peut pas permuter les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Exemple 1.50. Considérons les énoncés
(i) $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p \leq n$
(ii) $\forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ p \leq n$

Le premier peut se lire *"il existe un entier naturel plus grand que tous les entiers naturels"* et le deuxième peut se lire *"tout entier naturel admet un entier naturel plus grand que lui"*.
Ces énoncés ne coïncident pas (le premier est faux alors que le deuxième est vrai).
(i) Pour montrer que le premier énoncé est faux, il suffit de montrer que sa négation est vraie, i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p > n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $p \coloneqq n + 1$ alors $p = n + 1 > n$.
(ii) Montrons que le deuxième énoncé est vrai.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Posons $n \coloneqq p + 1$ alors $n \in \mathbb{N}$ et $p \leq p + 1 = n$.

On peut néanmoins toujours permuter deux quantificateurs universels ou deux quantificateurs existentiels.

Remarque 1.51 (Ellipse)**.** Il est courant d'écrire "$\forall x, y \in E$" pour "$\forall x \in E,\ \forall y \in E$" ainsi que $\exists x, y \in E$ pour $\exists x \in E,\ \exists y \in E$.

Remarque 1.52. L'ensemble vide est caractérisé par le fait que l'énoncé "$\forall x \in \varnothing,\ P(x)$" est vrai quel que soit le prédicat $P(x)$ considéré.
En passant à la négation, on obtient que "$\exists x \in \varnothing,\ P(x)$" est faux indépendamment du prédicat.
Ainsi l'énoncé "tous les lions de l'Université d'Angers sont roses" est vrai et l'énoncé "il existe un lion rose à l'Université d'Angers" est faux.
Le fait que "$\forall x \in \varnothing,\ P(x)$" soit vrai est lié à la Remarque 1.27 puisque "$\forall x \in \varnothing,\ P(x)$" signifie formellement "$\forall x,\ x \in \varnothing \Rightarrow P(x)$".

Définition 1.53. L'énoncé "$\exists! x \in E,\ P(x)$" signifie que $P(x)$ est vrai pour exactement un élément x de E. On lit "il existe un unique x dans E tel que $P(x)$ est vrai".

Remarque 1.54. Ainsi, $\exists! x \in E,\ P(x)$ est logiquement équivalent à

$$\exists x \in E,\ \left(P(x) \wedge (\forall y,\ P(y) \Rightarrow x = y)\right).$$

1.3 Fonctions

Définition 1.55. Soient A et B deux ensembles. Une *fonction* $f : A \to B$ est la donnée d'une partie $\Gamma_f \subset A \times B$ telle que $\forall x \in A,\ \exists! y \in B,\ (x, y) \in \Gamma_f$.
On dit que f est le nom de la fonction, que A est le *domaine* de f, que B est l'*ensemble d'arrivée* de f et que Γ_f est le *graphe* de f.
Pour $x \in A$, on note $f(x) \coloneqq y$ où y est l'unique élément de B tel que $(x, y) \in \Gamma_f$.

De façon moins formelle, une fonction $f : A \to B$ est la donnée de deux ensembles A et B, respectivement le domaine et l'ensemble d'arrivée, ainsi que d'un processus qui assigne à chaque $x \in A$ un unique $f(x) \in B$.

Remarque 1.56. Le domaine et l'ensemble d'arrivée font parties intégrantes de la définition d'une fonction.
Ainsi $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array} \right.$ ne sont pas égales[3].
Et de même $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $i : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ ne sont pas égales[4].

Il existe plusieurs façons de définir une fonction :
- À la main : on définit $f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ par $f(1) = \pi$, $f(2) = e$ et $f(3) = 42$.
- Par une formule (en précisant bien le domaine et l'ensemble d'arrivée) :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array} \right. .$$
- Par morceaux : on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{array} \right. .$$
- Par certaines propriétés : on montre qu'il existe une unique fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- ...

Les fonctions suivantes sont mal définies :
- $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ car $\sqrt{-1}$ ne permet pas d'associer une valeur dans $\mathbb{R}$ à -1.
- $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ car 0 est associé à une valeur n'étant pas dans l'ensemble d'arrivée.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$ car 0 n'est pas associé à une unique valeur.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{array} \right.$ car 0 n'est pas associé à une valeur.

[3] Par exemple, la première est surjective mais pas la deuxième.
[4] Par exemple, la deuxième est injective mais pas la première.

Définitions 1.57. Soit $f : A \to B$ une fonction, alors :

- on dit que f est *injective* si
$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2),$$
ou, de façon équivalente en prenant la contraposée, si
$$\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2;$$
- on dit que f est *surjective* si
$$\forall y \in B,\ \exists x \in A,\ y = f(x);$$
- on dit que f est *bijective* si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si
$$\forall y \in B,\ \exists! x \in A,\ y = f(x).$$

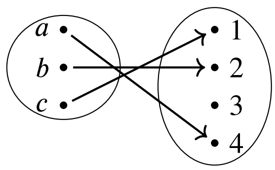


Fig. : Injective

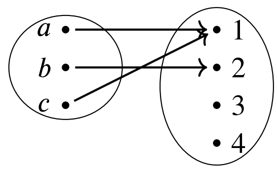


Fig. : Non injective

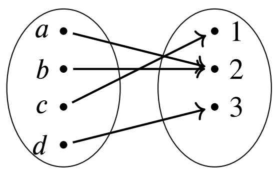


Fig. : Surjective

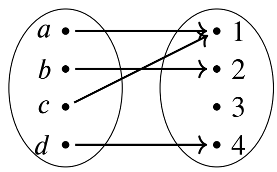


Fig. : Non surjective

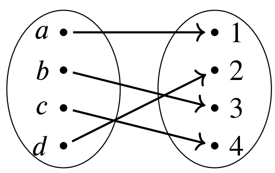


Fig. : Bijective

Définitions 1.58. Soit $f : A \to B$ une fonction, alors :

- l'*image de $E \subset A$ par f* est
$$f(E) \coloneqq \{f(x) : x \in E\} \subset B,$$
- l'*image de f* est
$$\mathrm{Im}(f) \coloneqq f(A),$$
- l'*image inverse (ou préimage) de $F \subset B$ par f* est
$$f^{-1}(F) \coloneqq \{x \in A : f(x) \in F\},$$

- le *graphe de f* est
$$\Gamma_f \coloneqq \{(x,y) \in A \times B \ : \ y = f(x)\}.$$

Remarque 1.59. Attention, $f^{-1}(F)$ est une notation valable même lorsque f n'est pas bijective (et donc que la fonction réciproque f^{-1} n'est pas définie). Il s'agit simplement d'une notation.

Remarque 1.60. Attention à ne pas confondre l'ensemble d'arrivée et l'image d'une fonction.

Proposition 1.61. *Soit $f : A \to B$ une fonction.*

1. *Soient $E, F \subset A$, alors :*
   (a) $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$
   (b) $f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F)$
   (c) $E \subset f^{-1}(f(E))$
2. *Soient $G, H \subset B$, alors :*
   (a) $f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$
   (b) $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$
   (c) $f(f^{-1}(G)) \subset G$

Démonstration.

1. (a) Soit $y \in B$, alors
$$\begin{aligned} y \in f(E \cup F) &\Leftrightarrow \exists x \in E \cup F,\ y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E,\ y = f(x) \text{ ou } \exists x \in F,\ y = f(x) \\ &\Leftrightarrow y \in f(E) \text{ ou } y \in f(F) \\ &\Leftrightarrow y \in f(E) \cup f(F) \end{aligned}$$
   (b) Soit $y \in f(E \cap F)$. Alors il existe $x \in E \cap F$ tel que $y = f(x)$.
   Puisque $x \in E$, on a $y = f(x) \in f(E)$ et, puisque $x \in F$, on a $y = f(x) \in f(F)$.
   Donc $y \in f(E) \cap f(F)$.
   On a bien montré que si $y \in f(E \cap F)$ alors $y \in f(E) \cap f(F)$.
   (c) Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in f(E)$. Donc $x \in \{a \in A \ : \ f(a) \in f(E)\} = f^{-1}(f(E))$.
   On a bien montré que si $x \in E$ alors $x \in f^{-1}(f(E))$.
2. (a) Soit $x \in A$, alors
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(G \cup H) &\Leftrightarrow f(x) \in G \cup H \\ &\Leftrightarrow f(x) \in G \text{ ou } f(x) \in H \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(G) \text{ ou } x \in f^{-1}(H) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H) \end{aligned}$$
   (b) Soit $x \in A$, alors
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(G \cap H) &\Leftrightarrow f(x) \in G \cap H \\ &\Leftrightarrow f(x) \in G \text{ et } f(x) \in H \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(G) \text{ et } x \in f^{-1}(H) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) \end{aligned}$$
   (c) Soit $y \in f(f^{-1}(G))$. Alors il existe $x \in f^{-1}(G)$ tel que $y = f(x)$.
   Mais, puisque $x \in f^{-1}(G)$, on a $y = f(x) \in G$.
   On a bien montré que si $y \in f(f^{-1}(G))$ alors $y \in G$.

■

Remarque 1.62.
Lorsque f n'est pas injective, les inclusions des points 1.(b) et 1.(c) peuvent être strictes.
Lorsque f n'est pas surjective, l'inclusion 2.(c) peut être stricte.
Voir l'Exercice 14.

Définition 1.63. Soient $f : A \to B$ et $g : C \to D$ deux fonctions où $\mathrm{Im}(f) \subset C$. On définit la *composée* de g avec f par

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} A & \to & D \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

On démontre aisément la proposition suivante :

Proposition 1.64 (Associativité de la composition)**.** *$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*
On peut donc simplement noter $h \circ g \circ f$.

Remarque 1.65. Attention, la composition n'est pas commutative.
Définissons $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$. Alors $f \circ g(2) = f(g(2)) = f(4) = 5$ et $g \circ f(x) = g(f(2)) = g(3) = 9$. Donc $f \circ g \neq g \circ f$.

Proposition 1.66. *Soient $f : A \to B$ et $g : C \to D$ deux fonctions où $\mathrm{Im}(f) \subset C$, alors*
- *$g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective ;*
- *$g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.*

Démonstration.
- Supposons que $g \circ f$ soit injective.
  Soient $x, y \in A$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $g(f(x)) = g(f(y))$ et donc $x = y$ puisque $g \circ f$ est injective.
  On a bien montré que $\forall x, y \in A,\ f(x) = f(y) \implies x = y$.
- Supposons que $g \circ f$ soit surjective.
  Soit $y \in D$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $z \in A$ tel que $y = g(f(z))$.
  Posons $x \coloneqq f(z) \in \mathrm{Im}(f) \subset C$. Alors $g(x) = y$.
  On a bien montré que $\forall y \in D,\ \exists x \in C,\ g(x) = y$.

∎

Proposition 1.67. *Une fonction $f : A \to B$ est bijective si et seulement s'il existe une fonction $g : B \to A$ telle que*

$$\begin{cases} \forall x \in A,\ g(f(x)) = x \\ \forall y \in B,\ f(g(y)) = y \end{cases}.$$

Dans ce cas, g est unique et est appelée fonction réciproque de f *que l'on dénote par $f^{-1} : B \to A$.*

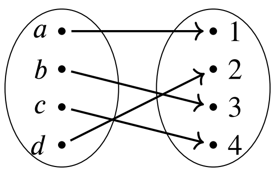


Fig. : Fonction bijective

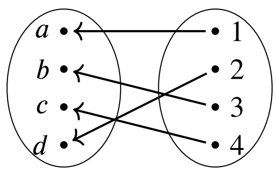


Fig. : Sa réciproque

Démonstration. Supposons que f soit bijective.
Alors pour tout $y \in B$, il existe un unique $x_y \in A$ tel que $y = f(x_y)$.
On définit $g : B \to A$ par $g(y) = x_y$.
Soit $x \in A$. Puisque f est injective, on déduit de $f(x) = f(x_{f(x)})$ que $x = x_{f(x)}$. Donc $g(f(x)) = x_{f(x)} = x$.
Soit $y \in B$. Alors $f(g(y)) = f(x_y) = y$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $g : B \to A$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ et $g \circ f = \mathrm{id}_A$.
Puisque $f \circ g = \mathrm{id}_B$ est surjective, on a que f est surjective.
Puisque $g \circ f = \mathrm{id}_A$ est injective, on a que f est injective.
Donc f est bijective.

Il reste à montrer l'unicité de la réciproque.
Supposons que $g : B \to A$ et $\tilde{g} : B \to A$ conviennent.
Soit $y \in B$. Alors $f(g(y)) = y = f(\tilde{g}(y))$ et donc $g(y) = \tilde{g}(y)$ puisque f est injective.
Donc $\tilde{g} = g$. ■

Proposition 1.68. *Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont bijectives, alors $g \circ f : A \to C$ est bijective et*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. Soit $x \in A$, alors $((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f))(x) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x$.
Soit $y \in C$, alors $((g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}))(y) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(y)))) = g(g^{-1}(y)) = y$.
Donc $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

1.4 Quelques méthodes de raisonnement en mathématiques

Exemple 1.69 (Méthode directe)**.** Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}$, si n est pair alors $n^2 + n$ est pair.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Supposons que n soit pair alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.
Puis $n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$.
Donc $n^2 + n$ est pair. ■

D'après la Proposition 1.42, l'implication $P \Rightarrow Q$ est logiquement équivalente à sa contraposée $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.

Exemple 1.70 (Par contraposition)**.** Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}$, si n^2 est pair alors n est pair.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Supposons par contraposition que n est impair.
Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.
Ainsi $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.
Donc n^2 est impair.
On a montré que si n est impair alors n^2 est impair.
Par contraposition, on obtient bien que si n^2 est pair alors n est pair. ■

D'après la Proposition 1.44, $(((\neg P) \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \Rightarrow (\neg Q))) \Rightarrow P$ est une tautologie. Ainsi, pour montrer P, on peut supposer $\neg P$ et en déduire que Q et $\neg Q$ sont vraies (d'où la contradiction) pour une certaine proposition Q. C'est le principe du raisonnement par l'absurde.

Exemple 1.71 (Par l'absurde)**.** Montrons qu'il n'existe pas un plus petit nombre réel strictement positif.
Supposons par l'absurde qu'il existe $m > 0$ un plus petit réel strictement positif.
Alors $\frac{m}{2} > 0$, donc, puisque m est le plus petit réel strictement positif, on a $\frac{m}{2} \geq m$.
Mais on sait aussi que $\frac{m}{2} < m$. D'où une contradiction. ■
Ici, P est $\neg(\exists m > 0,\ \forall x > 0,\ m \leq x)$ et Q est $\frac{m}{2} \geq m$.

Supposons que $P \Leftrightarrow (P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_k)$ soit vraie. Alors pour montrer que $P \Rightarrow R$ est vraie, il suffit de montrer que $P_i \Rightarrow R$ est vraie pour $i = 1, 2, \ldots, k$. On parle alors d'un raisonnement par disjonction de cas.

Exemple 1.72 (Disjonction de cas)**.** Si $n \in \mathbb{Z}$ alors $n^2 \not\equiv 2 \mod 3$.

- Premier cas : $n \equiv 0 \mod 3$.
  Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k$ et donc $n^2 = 9k \equiv 0 \mod 3$.
- Deuxième cas : $n \equiv 1 \mod 3$.
  Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k+1$ et donc $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 \mod 3$.
- Troisième cas : $n \equiv 2 \mod 3$.
  Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k+2$ et donc $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1 \mod 3$. ■

Exemple 1.73 (Disjonction de cas)**.** Montrons que $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leq x^2 - x + 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

- Premier cas : $x < 1$ alors $x - 1 < 0$ et $|x-1| = -x+1 \leq x^2 - x + 1$.
- Deuxième cas : $x \geq 1$ alors $|x-1| = x-1$.
  Remarquons que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq -1$, d'où $x^2 - x + 1 \geq x - 1 = |x-1|$.

Donc $|x-1| \leq x^2 - x + 1$. ■

D'après le principe du tiers exclu, cf Exemple 1.35, $P \vee (\neg P)$ est une tautologie. Donc soit P est vraie, soit $\neg P$ est vraie ; ce qui peut s'avérer très utile pour obtenir certaines démonstrations.

Exemple 1.74. Montrons que $\forall a, b \in \mathbb{R},\ ab = 0 \implies (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab = 0$.
Supposons que $a \neq 0$ alors, en simplifiant par a, on a que $b = 0$. ■
Ici, si $a = 0$, alors la conclusion est trivialement vérifiée, et si $a \neq 0$ alors la conclusion est aussi vérifiée ; puisque soit $a = 0$, soit $a \neq 0$, l'énoncé est bien démontré.

Voici une autre démonstration faisant intervenir le principe du tiers exclu.

Exemple 1.75. Il existe $a, b > 0$ irrationnels tels que $a^b \in \mathbb{Q}$.

- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ alors on peut prendre $a = b = \sqrt{2}$.
- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ alors on peut prendre $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ puisque

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

■

Il est intéressant de remarquer qu'il n'est pas nécessaire de savoir si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou non afin de conclure. Pour information, ce nombre est irrationnel d'après le Théorème de Gelfond–Schneider.

Exemple 1.76 (Raisonnement par équivalences)**.** Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) &\Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $(x-y)^2 \geq 0$, on a bien démontré que $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. ■
Lorsque l'on raisonne par équivalences, il faut faire attention à vérifier que l'équivalence est conservée à chaque étape (i.e. que l'implication et sa réciproque sont vraies toutes les deux).

Pour démontrer que deux énoncés sont équivalents, on peut utiliser une suite d'équivalences successives comme ci-dessus, i.e. pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on peut montrer les équivalences

$$P \Leftrightarrow P_1, P_1 \Leftrightarrow P_2, \dots, P_n \Leftrightarrow Q.$$

Mais on peut aussi montrer les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ séparément.

Exemple 1.77 (Raisonnement par double implications)**.**
Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 0$. Alors, $x^2 = -y^2$ est à la fois positif et négatif, et est donc nul. Ainsi $x^2 = y^2 = 0$ d'où $x = y = 0$.
Réciproquement, supposons que $x = y = 0$, alors $x^2 + y^2 = 0 + 0 = 0$. ■

Pour démontrer qu'un énoncé d'existence est vrai (i.e. de la forme $\exists x \in E,\ P(x)$) il suffit de trouver un exemple, c'est-à-dire d'exhiber un x convenant.

Exemple 1.78 (Démonstration par l'exemple)**.** Montrons qu'il existe un entier multiple de 2 et de 3.
Il suffit de remarquer que 6 convient puisque $2|6$ et $3|6$. ■

Exemple 1.79 (Existence et unicité)**.** Montrons qu'il existe un unique réel $x > 0$ tel que $x^2 = 1$.
- Existence : $x = 1$ convient puisque $1 > 0$ et $1^2 = 1$.
- Unicité : soient $x, y > 0$ tels que $x^2 = y^2 = 1$.
  Alors $0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Puisque $x + y > 0$, on a forcément $x - y = 0$. ■

Pour montrer qu'un énoncé de la forme $\forall x \in E,\ P(x)$ est faux, il suffit de trouver un contre-exemple puisque sa négation est $\exists x \in E, \neg P(x)$.

Exemple 1.80 (Contre-exemple)**.** Montrons que l'énoncé "tout entier naturel s'écrit comme la somme de deux carrés d'entiers naturels" est faux.
Pour cela, il suffit de trouver un entier naturel qui ne s'écrit pas comme la somme de deux carrés.
Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $3 = a^2 + b^2$.
Alors nécessairement $a = 0$ ou $a = 1$ puisque si $a \geq 2$ alors $a^2 + b^2 \geq a^2 \geq 4 > 3$.
De même, on a nécessairement $b = 0$ ou $b = 1$.
Or $0 + 0 = 0 \neq 3$, $1 + 0 = 1 \neq 3$, $0 + 1 = 1 \neq 3$ et $1 + 1 = 2 \neq 3$.
On ne peut donc pas écrire 3 comme somme de deux carrés d'entiers naturels. ■

La démonstration précédente utilise un raisonnement par analyse-synthèse :
- Analyse : on suppose qu'il existe un élément vérifiant une propriété donnée et on cherche des conditions nécessaires que doit vérifier cet élément afin de réduire la liste des solutions possibles (ici, on suppose que $3 = a^2+b^2$ et donc $(a, b) \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$).
- Synthèse : on vérifie parmi les candidats, ceux qui sont vraiment solutions.

Ce type de raisonnement est utile pour montrer l'existence d'une solution, l'existence et unicité d'une solution ou l'absence de solution.

Exemple 1.81 (Raisonnement par analyse-synthèse)**.** On cherche l'ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n - 4|3n - 17$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 4|3n - 17$.
Alors $n - 4|\,(3n - 17 - 3(n - 4)) = -5$.
Donc $n - 4 \in \{-5, -1, 1, 5\}$, et ainsi $n \in \{-1, 3, 5, 9\}$.

On vérifie maintenant chacune de ces solutions éventuelles :
- Si $n=-1$ alors $n-4=-5|-20=3n-17$.
- Si $n=3$ alors $n-4=-1|3n-17$.
- Si $n=5$ alors $n-4=1|3n-17$.
- Si $n=9$ alors $n-4=5|10=3n-17$.

Donc $\{n \in \mathbb{Z} \ : \ n-4|3n-17\} = \{-1,3,5,9\}$. ■

La dernière étape est primordiale : comme vu dans l'exemple précédent, certains candidats peuvent ne pas être solution.

Exemple 1.82 (Raisonnement par analyse-synthèse)**.** Montrons que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique $f = i + p$ où $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Analyse : soient $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire telles que $f = i + p$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $f(x) = i(x) + p(x)$ et $f(-x) = -i(x) + p(x)$.
  Donc $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.
  Donc, si i et p conviennent alors il s'agit nécessaire des fonctions obtenues, d'où l'unicité.
- Synthèse : on vérifie que les fonctions trouvées conviennent.
  Définissons $i, p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, alors
  - Si $x \in \mathbb{R}$, alors $i(x) + p(x) = f(x)$. Donc $f = i + p$.
  - Si $x \in \mathbb{R}$, alors $i(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -i(x)$. Donc i est impaire.
  - Si $x \in \mathbb{R}$, alors $p(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = p(x)$. Donc p est impaire.

  Donc i et p conviennent. ■

Le raisonnement par récurrence est une propriété caractéristique[5] de $\mathbb{N}$ permettant de démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$.
Il se réalise en deux étapes :
1. Initialisation : on montre que $P(n_0)$ est vraie ;
2. Hérédité : on montre que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
   En pratique, on suppose $P(n)$ vraie (*l'hypothèse de récurrence*) pour un certain $n \geq n_0$ et on montre $P(n+1)$.

Il existe différentes variantes comme la récurrence double[6] ou la récurrence forte [7].

Exemple 1.83 (Raisonnement par récurrence)**.**
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n^3 + 2n = 3k$.

- *Initialisation au rang $n = 0$:* $0^3 + 2 \times 0 = 3 \times 0$.
- *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel $n^3 + 2n = 3k$. Alors

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= 3k + 3n^2 + 3n + 3 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3(k + n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

  Ce qui démontre l'hérédité puisque $k + n^2 + n + \in \mathbb{N}$. ■

[5]Voir la Remarque B.2.
[6]On montre $P(n_0)$, $P(n_0+1)$ et $\forall n \geq n_0$, $(P(n) \wedge P(n+1)) \Rightarrow P(n+2))$.
[7]On montre $P(n_0)$ et $\forall k \geq 0$, $\big(P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(n_0+k)) \Rightarrow P(n_0+k+1)\big)$.

Exemple 1.84 (Raisonnement par récurrence commençant au rang 5)**.**
Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

- **Initialisation au rang** $n = 5$ **:** $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.
- **Hérédité :** supposons que $2^n > n^2$ pour un certain entier $n \geq 5$ et montrons que $2^{n+1} > (n+1)^2$.
  Par hypothèse de récurrence, on a $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$. Il suffit donc de montrer que $2n^2 > (n+1)^2$ qui est équivalent à $n^2 - 2n - 1 > 0$.
  Pour cela, on étudie le signe du polynôme $x^2 - 2x - 1$: il est de degré 2, de coefficient dominant positif et de discriminant $(-2)^2 - 4 \times (-1) = 8 > 0$. Ainsi

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Puisque $5 > 1 + \sqrt{2}$, on a bien que $n^2 - 2n - 1 > 0$. Ce qui termine l'hérédité. ■

Cet exemple est intéressant puisque l'hérédité est vraie pour $n \geq 3$, mais néanmoins $\boldsymbol{P}(3)$ et $\boldsymbol{P}(4)$ sont fausses. Cela montre bien que l'initialisation est une étape cruciale du raisonnement par récurrence.

Exemple 1.85 (Récurrence forte)**.** On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.
Montrons par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_n = 3n$.

- *Initialisation au rang $n = 1$:* $u_1 = 3 \times 1$.
- *Hérédité :* soit $n \geq 1$. Supposons que $u_k = 3k$ pour $k = 1, \dots, n$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 3k \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{6}{n}\frac{n(n+1)}{2} = 3(n+1) \end{aligned}$$

  Ce qui termine l'hérédité. ■

Exemple 1.86 (Inégalité de Bernoulli)**.**
Montrons par récurrence que $\forall x \in [-1, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
Soit $x \in [-1, +\infty)$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

- *Initialisation au rang $n = 0$:* $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$.
- *Hérédité :* supposons que $(1+x)^n \geq 1 + nx$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \quad \textit{par hypothèse de récurrence puisque } 1+x \geq 0 \\ &= 1 + x + nx + nx^2 \\ &\geq 1 + x + nx = 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

  Ce qui termine la démonstration. ■

Exemple 1.87 (Une dernière récurrence)**.** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On veut montrer que si on retire une case d'un damier de taille $2^n \times 2^n$ alors les cases restantes peuvent être recouvertes par des trominos en forme de L comme ci-dessous :

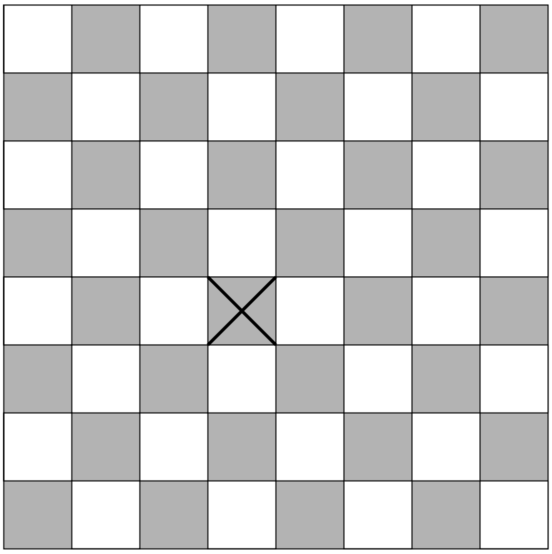


FIG. : Un damier 8×8 dont une case a été retirée.

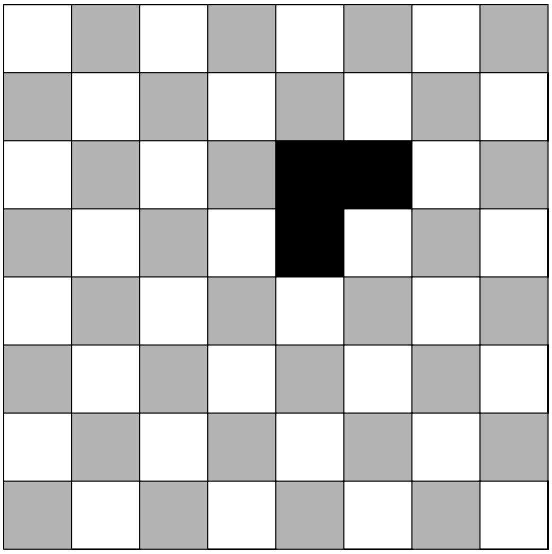
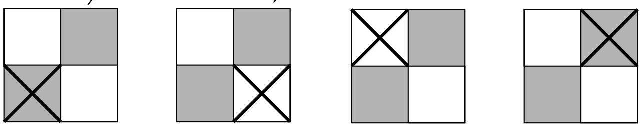


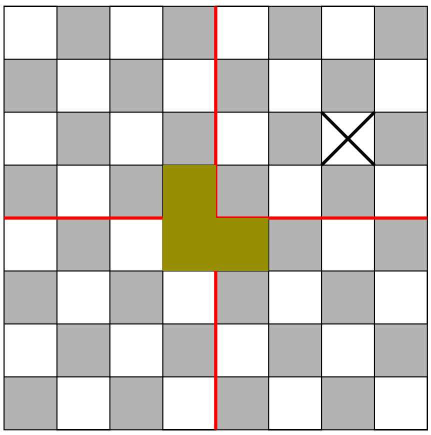
FIG. : Un tromino en forme de L sur un damier.

Démontrons le résultat par récurrence sur $n \geq 1$.

- *Initialisation au rang* $n = 1$. Il n'y a que 4 cas à étudier (correspondants à la case que l'on enlève). Pour chacun, les cases restantes forment exactement un tromino en forme :

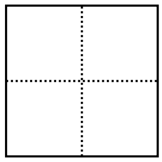
- Hérédité : supposons que l'énoncé soit vrai pour un certain $n \geq 1$. On considère un damier $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ dont on a retiré une case.
  On peut toujours placer un tromino en forme de L de sorte à obtenir 4 damiers de taille $2^n \times 2^n$ ayant chacun une case retirée ou déjà recouverte.

  Par hypothèse de récurrence, on peut alors recouvrir chacun de ces quatre damiers $2^n \times 2^n$ avec des trominos en forme de L.
  Ce qui termine la démonstration. ■

Le principe des tiroirs de Dirichlet s'énonce informellement[8] de façon très simple : si on range m paires de chaussettes dans n tiroirs où $1 \leq n < m$ alors forcément un tiroir contient deux paires de chaussettes.
En effet, supposons par l'absurde que chaque tiroir contienne au plus une paire de chaussettes alors il y a au plus n paires de chaussettes, or $n < m$, d'où une contradiction.

Exemple 1.88 (Tiroirs de Dirichlet)**.** Montrons qu'étant donnés 5 points dans un carré de côté 2, on peut toujours trouver deux points dont la distance est inférieure ou égale à $\sqrt{2}$.
On divise le carré en quatre carrés de côté 1 de la façon suivante :



Alors, d'après le principe des tiroirs de Dirichlet, au moins un de ces quatres carrés contient deux points.
Or, deux points d'un carré de côté 1 sont éloignés d'une distance d'au plus $\sqrt{2}$. ■

[8]Plus formellement : si E, F sont deux ensembles finis où $|E| > |F|$ alors il n'existe pas d'injection $E \to F$.

1.5 Exercices

Exercice 1. Écrire en extension l'ensemble suivant : $\left\{n \in \mathbb{Z} \ : \ \sqrt{2} < n < 2\pi\right\}$.

Exercice 2. Montrer que

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x - y = 1\right\} = \{(t + 1, 4t + 3) \ : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 3. Soient A, B, C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

Exercice 4. Représenter graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble $A \times B$ où $A, B \subset \mathbb{R}$ sont :

1. $A = \{0\}$ et $B = [0, 1]$,
2. $A = \{0, 1\}$ et $B = [2, 3]$,
3. $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ et $B = \{0, 1, 2\}$,
4. $A = [0, 1]$ et $B = [2, 3]$,
5. $A = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{4\}$ et $B = [0, 1]$,
6. $A = \mathbb{Q}$ et $B = \varnothing$.

Exercice 5. Posons $D \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Existe-t-il $A, B \subset \mathbb{R}$ tels que $D = A \times B$?

Exercice 6. Montrer que $\neg(P \wedge Q)$ et $(\neg P) \vee (\neg Q)$ sont logiquement équivalentes.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire les énoncés suivants formellement à l'aide de quantificateurs.

1. f est constante.
2. f n'est pas constante.
3. f est nulle.
4. f s'annule.
5. f est 2π-périodique.
6. f est croissante.
7. f n'est pas croissante.
8. f est strictement croissante.

Exercice 8. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où $D \subset \mathbb{R}$. Soit $a \in D$.
Pour chacun des énoncés suivants : exprimer en français la signification de l'énoncé puis donner sa négation.

(i) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \leq M$.
(ii) $\forall x \in D, f(x) \leq f(a)$.
(iii) $\forall x \in D, f(x) > 0 \implies x \leq 0$.
(iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Exercice 9. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & [0, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array} \qquad f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{array} \qquad f_9 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, xy) \end{array}$$

$$f_{10} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & \mathbb{R} \setminus A \end{array} \qquad f_{11} : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (p, q) & \mapsto & 2^p 3^q \end{array}$$

Exercice 10. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [0,1[\\ x & \mapsto & \frac{x}{1+x} \end{array}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est bijective et déterminer la réciproque de f.

Exercice 11. Construire une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Exercice 12. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset S^1$ où $S^1 \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2=1\right\}$.
2. Est-ce que $(-1,0) \in \operatorname{Im}(f)$?
3. On considère $(x_0,y_0) \in S^1 \setminus \{(-1,0)\}$.
   (a) Quelle est la pente de la droite passant par $(-1,0)$ et (x_0,y_0) ? On la note m.
   (b) Calculer $f(m)$.
4. En déduire $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 13. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. La fonction f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $\operatorname{Im}(f) = [-1,1]$.
3. Montrer que $g : [-1,1] \to [-1,1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est bijective.

Exercice 14. Soit $f : A \to B$ une fonction.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall E,F \in \mathcal{P}(A),\ f(E) \cap f(F) = f(E \cap F)$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall E \in \mathcal{P}(A),\ E = f^{-1}(f(E))$.
3. Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall G \in \mathcal{P}(B),\ f(f^{-1}(G)) = G$.

Exercice 15. On considère une fonction $f : A \to B$. Pour chacune des propriétés suivantes, dire si on peut en déduire que f est injective ou que f est surjective.

1. $\forall y \in B,\ f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.
2. $\forall y \in B,\ f^{-1}(\{y\})$ contient au plus un élément.
3. $\forall y \in \operatorname{Im}(f),\ f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.

Exercice 16. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon$ alors $a = 0$.

Exercice 17. On rappelle que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\forall a,b \in \mathbb{Z},\ a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0$.
2. Montrer que $\forall a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \implies a = c$ et $b = d$.

Exercice 18. Déterminer l'ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $9n^5 - 12n^4 + 6n - 5 = 0$.

Exercice 19. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 20. Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = qd + r$ et $0 \leq r < d$.
On pourra comparer cet exercice au Théorème B.4.

Exercice 21. Montrer que si n est la somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Exercice 22. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x.$$

Exercice 23. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que $f(2) = 2$ et $\forall p,q \in \mathbb{N},\ f(pq) = f(p)f(q)$.
On rappelle que f est strictement croissante si $\forall x,y \in \mathbb{N},\ x < y \implies f(x) < f(y)$.

Exercice 24. On admet que $\mathbb{N}$ est bien ordonné : toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. En déduire qu'il n'existe pas d'entier compris strictement entre 0 et 1.

Exercice 25. Que penser de la démonstration suivante ?
On veut montrer que pour tout $n \geq 2$, n points distincts du plan sont toujours alignés.

- Initialisation au rang $n = 2$: deux points du plan se trouvent toujours sur une même droite.
- Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain $n \geq 2$.
  Soient $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ $n+1$ points du plan. Par hypothèse de récurrence :
  - $A_1, A_2, \dots, A_n$ se trouvent sur une même droite D.
  - $A_2, A_3, \dots, A_{n+1}$ se trouvent sur une même droite $\tilde{D}$.

  Puisque $A_2, A_3, \dots, A_n$ se trouvent sur D et sur $\tilde{D}$, on a que $D = \tilde{D}$.
  Donc $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ sont alignés. ■

Exercice 26. Montrer que parmi 42 entiers distincts, on peut toujours en trouver deux distincts a et b tels que $b - a$ est un multiple de 41.

Exercice 27. Montrer que parmi 5 entiers distincts, il y en a toujours trois distincts dont la somme est divisible par 3.

Exercice 28. On considère un damier 10×10.
À l'étape initiale, on colorie 9 cases du damier. Puis, on passe d'une étape à la suivante en coloriant chaque case adjacente à au moins deux cases déjà coloriées.
Existe-t-il une configuration initiale permettant de colorier entièrement le damier après un nombre fini d'étapes ?

Exercice 29. On considère un coloriage de $\mathbb{R}^2$ par deux couleurs[9].
Montrer que l'on peut trouver un rectangle dont les quatre sommets ont la même couleur.

Exercice 30. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que pour tout choix de $n+1$ nombres distincts dans $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, il en existe deux premiers entre eux.

[9] i.e. une fonction $\mathbb{R}^2 \to \{0, 1\}$.

2 L'ensemble des nombres réels

2.1 Définition

Définition 2.1. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni des deux lois de composition interne $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*l'addition*) et $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*la multiplication*), de deux éléments distincts 0 et 1, ainsi que de la relation binaire $\leq$ (*inférieur ou égal*) est caractérisé[10] par les propriétés suivantes :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif :
  - (a) $+$ est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x+y)+z = x+(y+z)$
  - (b) 0 est le neutre de $+$: $\forall x \in \mathbb{R},\ x+0 = 0+x = x$
  - (c) Existence d'un inverse additif : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (-x) \in \mathbb{R},\ x+(-x) = (-x)+x = 0$
  - (d) $+$ est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x+y = y+x$
  - (e) $\cdot$ est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (xy)z = x(yz)$
  - (f) 1 est le neutre de $\cdot$: $\forall x \in \mathbb{R},\ 1\cdot x = x \cdot 1 = x$
  - (g) $\cdot$ est distributive par rapport à $+$: $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x(y+z) = xy+xz$ et $(x+y)z = xz+yz$
  - (h) Existence d'un inverse multiplicatif : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R},\ xx^{-1} = x^{-1}x = 1$
  - (i) $\cdot$ est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = yx$
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné :
  - (j) $\leq$ est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$
  - (k) $\leq$ est antisymétrique : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y$
  - (l) $\leq$ est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z$
  - (m) $\leq$ est totale : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ ou $y \leq x$
- L'ordre est compatible avec la structure de corps :
  - (n) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z)$
  - (o) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (0 \leq x \text{ et } 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq xy$
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet : toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure ; on reviendra sur la signification de cette propriété dans la Section 2.5.

Remarque 2.2. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on note xy pour $x \cdot y$.

Remarque 2.3. La multiplication est prioritaire sur l'addition, par exemple, pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + yz = x + (yz)$.

Remarque 2.4. Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$, on note $x < y$ pour $(x \leq y$ et $x \neq y)$.

Remarque 2.5. Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$, on note $x \geq y$ (resp. $x > y$) pour $y \leq x$ (resp. $y < x$).

Remarque 2.6. Étant donnés $x, y, z \in \mathbb{R}$, on note $x \leq y \leq z$ pour

$$x \leq y \text{ et } y \leq z$$

(et de façon similaire pour $<$, $\geq$, et $>$).

Remarque 2.7. Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y \neq 0$, on note $\frac{x}{y} \coloneqq xy^{-1}$.

Remarque 2.8. Puisque l'addition et la multiplication sont associatives, pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on note

$$x+y+z \coloneqq (x+y)+z = x+(y+z) \qquad xyz \coloneqq (xy)z = x(yz).$$

[10] L'énoncé exact est qu'il existe un unique corps totalement ordonné Dedekind-complet, à isomorphisme près. Ce qui dépasse largement le cadre de ce cours : il faut d'abord montrer qu'un tel ensemble existe (c'est-à-dire le construire) puis vérifier que deux constructions donnent essentiellement le même corps, voir la Section C. Notons qu'il existe d'autres caractérisations de $\mathbb{R}$.

La complétude au sens de Dedekind est vraiment le point fondamental : par exemple $\mathbb{Q}$ vérifie tous les autres points. La complétude au sens de Dedekind peut s'exprimer sous plusieurs énoncés équivalents, dont certains sont ci-dessous[11] :

- Toute partie non-vide et majorée admet une borne supérieure,
- Le théorème de convergence monotone des suites,
- Le théorème des valeurs intermédiaires,
- Le théorème de Weierstrass sur l'image continue d'un segment,
- Le théorème de Rolle,
- Le théorème des accroissements finis,
- Une fonction continue sur un segment est Riemann-intégrable,
- La propriété de Bolzano-Weierstrass : une suite bornée de $\mathbb{R}$ admet une sous-suite convergente,
- La propriété des coupures de Dedekind :

$$\forall A,B\subset\mathbb{R},\quad \left.\begin{array}{r} A,B\neq\varnothing \\ \mathbb{R}=A\cup B \\ \forall a\in A,\ \forall b\in B,\ a<b \end{array}\right\} \implies \exists! c\in\mathbb{R},\ \forall a\in A,\ \forall b\in B,\ a\leq c\leq b$$

- $\mathbb{R}$ est archimédien et Cauchy-complet (toute suite de Cauchy est convergente),
- $\cdots$

Intuitivement, cette propriété de complétude au sens de Dedekind signifie :

1. qu'il n'existe pas de réels infinitésimaux (on dit que $\mathbb{R}$ est *archimédien*, ce qui est déjà le cas pour $\mathbb{Q}$) :
$$\forall\varepsilon>0,\ \forall A>0,\ \exists n\in\mathbb{N},\ n\varepsilon>A$$
2. qu'il n'y a pas de "trou", de nombre manquant[12], c'est la principale différence avec $\mathbb{Q}$. Par exemple $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ mais on peut construire $\sqrt{2}$ comme réel à partir des différents énoncés présentés ci-dessus :
   - Posons $x\coloneqq\sup\left\{r\in\mathbb{R}\ :\ r^2<2\right\}$, alors $x>0$ et $x^2=2$.
   - Considérons $x_0=1$ et $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}$. Alors (x_n) est une suite décroissante de termes strictement positifs, elle converge donc vers un réel ℓ vérifiant $\ell^2=2$ et $\ell\geq 0$.
   - Considérons la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2-2$. Alors $f(0)<0$ et $f(2)>0$. Puisque f est continue, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $x\in]0,2[$ tel que $x^2=2$.

2.2 Premières propriétés

Proposition 2.9. $\forall x\in\mathbb{R},\ 0\cdot x=x\cdot 0=0.$

Démonstration. Soit $x\in\mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} 0\cdot x &= (0+0)\cdot x && \text{puisque 0 est neutre de l'addition (2.1.(b))} \\ &= 0\cdot x+0\cdot x && \text{par distributivité (2.1.(g)).} \end{aligned}$$

Donc, en additionnant par $-(0\cdot x)$ (2.1.(c)), il vient que

$$0=0\cdot x+(-(x\cdot 0))=0\cdot x+0\cdot x+(-(x\cdot 0))=0\cdot x.$$

Par commutativité de la multiplication (2.1.(i)), on obtient que $x\cdot 0=0\cdot x=0$. ■

[11] Un cours d'analyse en première année consiste donc à étudier la complétude au sens de Dedekind de $\mathbb{R}$.
[12] Formellement, toute suite infinie de chiffres est le développement décimal d'un nombre réel, voir §D.

Proposition 2.10. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xy = 0$.
Supposons que $x \neq 0$ alors $y = 1 \cdot y = x^{-1}xy = x^{-1} \cdot 0 = 0$ d'après la Proposition 2.9.
La réciproque découle de la Proposition 2.9. ■

Proposition 2.11. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x = y \Leftrightarrow xz = yz.$

Démonstration. La première implication s'obtient par multiplication par z.
Montrons la réciproque. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xz = yz$ et soit $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Alors $x = xzz^{-1} = yzz^{-1} = y$. ■

Proposition 2.12 (Unicité du neutre additif)**.**
0 est l'unique élément vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 0 = 0 + x = x$.

Démonstration. Soit $e \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ x + e = e + x = x$. Alors

$$\begin{aligned} e &= e + 0 \text{ puisque 0 est neutre de l'addition} \\ &= 0 \text{ par hypothèse sur } e. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.13 (Unicité de l'inverse additif)**.**
Soit $x \in \mathbb{R}$*, alors il existe un unique élément* $(-x) \in \mathbb{R}$ *tel que* $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Démonstration. L'existence de $(-x)$ découle de 2.1.(c) ; il reste à vérifier l'unicité.
Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y = y + x = 0$, alors

$$y = 0 + y = ((-x) + x) + y = (-x) + (x + y) = (-x) + 0 = (-x).$$

■

Proposition 2.14. $(-0) = 0$

Démonstration. Puisque 0 est le neutre de l'addition, on a $0 + 0 = 0$. ■

Proposition 2.15. $\forall x \in \mathbb{R},\ -(-x) = x$

Démonstration. En effet, $(-x) + x = x + (-x) = 0$, donc x est inverse additif de $(-x)$ et donc $x = -(-x)$ par unicité. ■

Proposition 2.16. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x = y \Leftrightarrow (-x) = (-y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
Si $x = y$ alors $(-x) = (-y)$ par unicité de l'inverse additif.
Si $(-x) = (-y)$ alors $x = -(-x) = -(-y) = y$. ■

Remarque 2.17. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on note $x - y$ pour $x + (-y)$.

Proposition 2.18 (Unicité du neutre multiplicatif)**.**
1 est l'unique élément vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

Démonstration. Soit $e \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ x \cdot e = e \cdot x = x$. Alors

$$\begin{aligned} e &= e \cdot 1 \text{ puisque 1 est neutre de la multiplication} \\ &= 1 \text{ par hypothèse sur } e. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.19 (Unicité de l'inverse multiplicatif)**.**
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors il existe un unique élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

Démonstration. L'existence de x^{-1} découle de 2.1.(h) ; il reste à vérifier l'unicité.
Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $xy = yx = 1$, alors

$$y = 1y = \left(x^{-1}x\right) y = x^{-1}(xy) = x^{-1}1 = x^{-1}.$$

■

Proposition 2.20. $1^{-1} = 1$

Démonstration. Puisque 1 est le neutre de la multiplication, on a $1 \cdot 1 = 1$. ■

Proposition 2.21. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left(x^{-1}\right)^{-1} = x.$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$, donc x est inverse multiplicatif de x^{-1} et donc $x = \left(x^{-1}\right)^{-1}$ par unicité. ■

Proposition 2.22. $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x = y \Leftrightarrow x^{-1} = y^{-1}.$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Si $x = y$ alors $x^{-1} = y^{-1}$ par unicité de l'inverse multiplicatif.
Si $x^{-1} = y^{-1}$ alors $x = \left(x^{-1}\right)^{-1} = \left(y^{-1}\right)^{-1} = y$. ■

Proposition 2.23. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ -(xy) = (-x)y = x(-y).$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, alors on a par distributivité (2.1.(g)) et par la Proposition 2.9 que

$$xy + (-x)y = (x - x)y = 0y = 0.$$

Ainsi $(-x)y = -(xy)$ par unicité de l'inverse additif.
On démontre que $-(xy) = x(-y)$ de façon similaire. ■

Proposition 2.24. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ (-x)^{-1} = -\left(x^{-1}\right).$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alors

$$\begin{aligned}
(-x)\left(-\left(x^{-1}\right)\right) &= -\left(-\left(xx^{-1}\right)\right) \text{ par la Proposition 2.23} \\
&= xx^{-1} \text{ par la Proposition 2.15} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc $(-x)^{-1} = -\left(x^{-1}\right)$. ■

Remarque 2.25. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on note $-x^{-1} \coloneqq (-x)^{-1} = -\left(x^{-1}\right)$.

Proposition 2.26. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *; de plus l'addition, la multiplication et l'ordre de* $\mathbb{Q}$ *sont compatibles avec ceux de* $\mathbb{R}$.

Ébauche de démonstration.
1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$: si $n \in \mathbb{N}$ alors $n = 1 + 1 + \cdots + 1 \in \mathbb{R}$. Donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
2. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$: si $n \in \mathbb{N}$ alors $-n \in \mathbb{R}$. Donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.
3. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: si $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ alors $\frac{a}{b} \coloneqq ab^{-1} \in \mathbb{R}$. Donc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. ■

2.3 Propriétés de l'ordre

Proposition 2.27.

(i) $1 > 0$

(ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$

(iii) $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ (x \leq y \text{ et } s \leq t) \Rightarrow x + s \leq y + t$

(iv) $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ (x \leq y \text{ et } s < t) \Rightarrow x + s < y + t$

(v) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$

(vi) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow -y < -x$

(vii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leq y \text{ et } z \geq 0) \Rightarrow xz \leq yz$

$(viii)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leq y \text{ et } z \leq 0) \Rightarrow xz \geq yz$

(ix) $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ (0 \leq x \leq y \text{ et } 0 \leq s \leq t) \Rightarrow xs \leq yt$

(x) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$

(xi) $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0$

(xii) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

$(xiii)$ $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

(xiv) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$

(xv) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$

(xvi) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z > 0,\ x \leq y \Leftrightarrow xz \leq yz$

$(xvii)$ $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z > 0,\ x < y \Leftrightarrow xz < yz$

$(xviii)$ $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z < 0,\ x \leq y \Leftrightarrow xz \geq yz$

(xix) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z < 0,\ x < y \Leftrightarrow xz > yz$

Démonstration.

(i) Supposons par l'absurde que $1 \leq 0$ alors, en additionnant avec -1 (2.1.(n)), on obtient $0 = 1 - 1 \leq 0 - 1 = -1$, d'où $1 = (-1)(-1) \geq 0$ (2.23,2.15,2.1.(o)).
Par antisymétrie (2.1.(k)), comme $1 \leq 0$ et $1 \geq 0$, on obtient $1 = 0$; d'où une contradiction.

(ii) Les deux implications découlent de 2.1.(n) en additionnant respectivement avec z et $-z$.

(iii) Soient $x, y, s, t \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$ et $s \leq t$, alors

$$x \leq y \implies x + s \leq y + s \text{ par 2.1.(n)}$$

et

$$s \leq t \implies s + y \leq t + y \text{ par 2.1.(n).}$$

On conclut par transitivité (2.1.(l)) que

$$x + s \leq y + s = s + y \leq t + y = y + t.$$

(iv) Soient $x, y, s, t \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$ et $s < t$. Supposons par l'absurde que $x + s = y + t$, alors

$$\begin{aligned} x \leq y &\implies x + s \leq y + s \text{ par 2.1.(n)} \\ &\implies y + t \leq y + s \text{ car } x + s = y + t \\ &\implies t = -y + y + t \leq -y + y + s = s \text{ par 2.1.(n)} \end{aligned}$$

On déduit de l'antisymétrie de l'ordre (2.1.(k)) que $s = t$, d'où une contradiction.

(v) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. En additionnant avec $-x-y$ (2.1.(n)), on obtient

$$-y = x - x - y \leq y - x - y = -x.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $-y \leq -x$. En additionnant avec $x + y$ (2.1.(n)), on obtient

$$x = -y + x + y \leq -x + x + y = y.$$

(vi) La propriété découle du point précédent et de la Proposition 2.16.

(vii) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$ et $z \geq 0$.
En additionnant la première inégalité avec $-x$ (2.1.(n)), on obtient $0 = x - x \leq y - x$.
Ainsi, on déduit de 2.1.(o) que $0 \leq (y-x)z = yz - xz$.
En additionnant par xz (2.1.(n)), on obtient que $xz \leq yz$.

$(viii)$ Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$ et $z \leq 0$.
On déduit de (v) que $-z \geq -0 = 0$.
Ainsi, d'après la Proposition 2.23 et de (vii), on a $-(xz) = x(-z) \leq y(-z) = -(yz)$.
On conclut à l'aide de (v) que $yz \leq xz$.

(ix) Soient $x, y, s, t \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq s \leq t$.
Puisque $x \leq y$ et $0 \leq s$, on déduit de (vii) que $xs \leq ys$.
Puisque $s \leq t$ et $0 \leq y$, on déduit de (vii) que $ys \leq yt$.
On conclut par transitivité de l'ordre 2.1.(l) : $xs \leq ys \leq yt$.

(x) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 0$. Supposons par l'absurde que $x^{-1} \leq 0$.
Alors, on déduit de $(viii)$ que $1 = x^{-1}x \leq 0x = 0$; d'où une contradiction. Ainsi $x^{-1} > 0$.
Pour la réciproque, supposons que $x^{-1} > 0$ alors $x = \left(x^{-1}\right)^{-1} > 0$ par la première implication.

(xi) Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} x < 0 &\Leftrightarrow -x > 0 \text{ par } (vi) \\ &\Leftrightarrow (-x)^{-1} > 0 \text{ par le point précédent} \\ &\Leftrightarrow -\left(x^{-1}\right) > 0 \text{ par la Proposition 2.24} \\ &\Leftrightarrow x^{-1} < 0 \text{ par } (vi) \end{aligned}$$

(xii) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x \leq y$.
Alors, d'après (x) on a que $x^{-1} > 0$ et $y^{-1} > 0$. Donc $x^{-1}y^{-1} \geq 0$ (2.1.(o)).
Donc, $0 < y^{-1} = xx^{-1}y^{-1} \leq yx^{-1}y^{-1} = x^{-1}$ ((x) et (vii)).

$(xiii)$ Le résultat découle du point précédent et de la Proposition 2.22.

(xiv) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} x \leq y < 0 &\Leftrightarrow 0 < -y \leq -x \quad \text{par } (v) \text{ et } (vi) \\ &\Leftrightarrow 0 < (-x)^{-1} \leq (-y)^{-1} \quad \text{par } (xii) \\ &\Leftrightarrow 0 < -x^{-1} \leq -y^{-1} \quad \text{par la Proposition 2.24} \\ &\Leftrightarrow y^{-1} \leq x^{-1} < 0 \quad \text{par } (v) \text{ et } (vi) \end{aligned}$$

(xv) Le résultat découle du point précédent et de la Proposition 2.22.

(xvi) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $z > 0$.
Supposons que $x \leq y$ alors $xz \leq yz$ par (vii).
Supposons que $xz \leq yz$ alors $z^{-1} > 0$ par (x) et $x = xzz^{-1} \leq yzz^{-1} = y$ par (vii).

$(xvii)$ Découle du point précédent et de la Proposition 2.11.

$(xviii)$ Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $z < 0$.
Supposons que $x \leq y$ alors $xz \geq yz$ par $(viii)$.
Supposons que $xz \geq yz$ alors $z^{-1} < 0$ par (xi) et $x = xzz^{-1} \leq yzz^{-1} = y$ par $(viii)$.

(xix) Découle du point précédent et de la Proposition 2.11.

∎

Proposition 2.28. *Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, alors*

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i \leq y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = y_i.$$

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur $n \geq 1$.

- *Initialisation au rang $n = 1$:* la conclusion est conséquence immédiate de l'hypothèse.
- *Hérédité :* supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geq 1$ et montrons-la pour $n + 1$.
  Soient $x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{n+1} \in \mathbb{R}$ vérifiant
  $$\forall i \in \{1, \dots, n+1\},\ x_i \leq y_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=1}^{n+1} y_i.$$
  Supposons par l'absurde que $x_{n+1} < y_{n+1}$ alors, d'après 2.27.(iv), on a
  $$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} < \sum_{i=1}^{n} y_i + y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} y_i,$$
  d'où une contradiction.
  Donc $x_{n+1} = y_{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n+1} x_i - x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} y_i - y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} y_i$.
  Par hypothèse de récurrence, on obtient alors que $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = y_i$. ∎

Corollaire 2.29. *Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, alors*

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = 0.$$

Proposition 2.30.
(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$

Démonstration.
(i) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est totalement ordonné (2.1.(m)), on peut raisonner par dichotomie :

- Supposons que $x \geq 0$ alors $x^2 \geq 0$ d'après 2.1.(o).
- Supposons que $x \leq 0$ alors $-x \geq 0$ d'après 2.27.(v) donc

$$\begin{aligned} x^2 &= (-x)^2 \text{ d'après les Propositions 2.23 et 2.15} \\ &\geq 0 \text{ par 2.1.(o).} \end{aligned}$$

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$ alors, d'après la Proposition 2.10,

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 0) \Leftrightarrow x = 0.$$

■

Corollaire 2.31. *Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, alors*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = 0.$$

TODO : *Polynôme de degré 2*

2.4 Valeur absolue

Définition 2.32. On définit la fonction *valeur absolue* par

$$|\cdot| : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \coloneqq \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

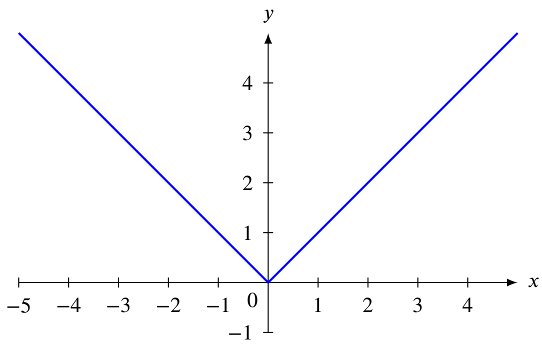


Fig. : Graphe de $y = |x|$

Proposition 2.33.

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \max(x, -x)$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$

(iv) $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leq x \leq |x|$

(v) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| = |y| \Leftrightarrow (x = y \textit{ ou } x = -y)$

(vi) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y|$

(vii) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$

$(viii)$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

(ix) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|$ (*inégalité triangulaire*)

(x) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$ (*inégalité triangulaire inversée*)

Démonstration.

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$.
- Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ et $\max(x, -x) = x$.
- Si $x < 0$ alors $|x| = -x$ et $\max(x, -x) = -x$.

Donc $|x| = \max(x, -x)$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$.
- Si $x \geq 0$ alors $|x| = x \geq 0$.
- Si $x < 0$ alors $|x| = -x > 0$.

(iii) Soit $x \in \mathbb{R}$.
- Si $x > 0$ alors $|x| = x > 0$.
- Si $x = 0$ alors $|x| = 0$.
- Si $x < 0$ alors $|x| = -x > 0$.

Donc $x = 0$ si et seulement si $|x| = 0$.

(iv) Soit $x \in \mathbb{R}$.
- Si $x \geq 0$ alors $-x \leq 0 \leq |x| = x$.
- Si $x < 0$ alors $-x = |x| \geq 0 > x$.

(v) Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
- Si $x = y$ ou $x = -y$ alors $|x| = |y|$.
- Si $|x| = |y|$, alors
  - Premier cas : $x, y \geq 0$ alors $x = y$.
  - Deuxième cas : $x \geq 0$ et $y < 0$ alors $x = -y$.
  - Troisième cas : $x < 0$ et $y \geq 0$ alors $-x = y$ et donc $x = -y$.
  - Quatrième cas : $x < 0$ et $y < 0$ alors $-x = -y$ et donc $x = y$.

  Donc $x = y$ ou $x = -y$.

(vi) Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
- Premier cas : $x, y \geq 0$ alors $xy \geq 0$. Ainsi $|x||y| = xy$ et $|xy| = xy$.
- Deuxième cas : $x \geq 0$ et $y < 0$ alors $xy \leq 0$. Ainsi $|x||y| = x(-y) = -xy$ et $|xy| = -xy$.
- Troisième cas : $x < 0$ et $y \geq 0$ alors $xy \leq 0$. Ainsi $|x||y| = (-x)y = -xy$ et $|xy| = -xy$.
- Dernier cas : $x < 0$ et $y < 0$ alors $xy \leq 0$. Ainsi $|x||y| = (-x)(-y) = xy$ et $|xy| = xy$.

Donc $|x||y| = |xy|$.

(vii) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Si $x > 0$ alors $\frac{1}{x} > 0$. Ainsi $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$ et $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$.
- Si $x < 0$ alors $\frac{1}{x} < 0$. Ainsi $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ et $\left|\frac{1}{x}\right| = -\frac{1}{x}$.

Donc $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.

($viii$) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $y \neq 0$. Alors $\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x\frac{1}{y}\right| = |x|\left|\frac{1}{y}\right| = |x|\frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$.

(ix) *Première démonstration.* Soient $x, y \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} |x+y| \leq |x| + |y| &\Leftrightarrow |x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 \\ &\Leftrightarrow xy \leq |xy|. \end{aligned}$$

Deuxième démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ alors $x+y \leq |x|+|y|$ et $-(x+y) = -x-y \leq |x|+|y|$ donc $|x+y| = \max(x+y, -(x+y)) \leq |x| + |y|$.

(x) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ alors

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

et

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x|.$$

Donc $|x| - |y| \leq |x - y|$ et $|y| - |x| \leq |x - y|$.
D'où $||x| - |y|| = \max(|x| - |y|, |y| - |x|) \leq |x - y|$. ■

Proposition 2.34. *Soient $a, x \in \mathbb{R}$. Alors :*

(i) *Si $a \geq 0$ alors $|x| = a \Leftrightarrow (x = a$ ou $x = -a)$*

(ii) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

(iii) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

(iv) $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a$ *ou* $x \leq -a)$

(v) $|x| > a \Leftrightarrow (x > a$ *ou* $x < -a)$

Démonstration. Soient $a, x \in \mathbb{R}$.

(i) $\Rightarrow$: $|x| = a = |a| \implies x = a$ ou $x = -a$ par 2.33.(v).
$\Leftarrow$: si $x = a$ alors $|x| = |a| = a$ (car $a \geq 0$) et si $x = -a$ alors $|x| = |-a| = a$ (car $-a \leq 0$).

(ii) $\Rightarrow$: si $|x| \leq a$ alors $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$.
$\Leftarrow$: supposons que $-a \leq x \leq a$.
Si $x \geq 0$ alors $|x| = x \leq a$. Si $x < 0$ alors $|x| = -x \leq a$.

(iii) Découle des deux points précédents (on remarquera que si $a < 0$ alors les deux assertions sont fausses et donc équivalentes).

(iv) $|x| \geq a \Leftrightarrow \text{non}\,(|x| < a) \Leftrightarrow \text{non}\,(-a < x \text{ et } x < a) \Leftrightarrow (x \leq -a \text{ ou } x \geq a)$

(v) $|x| > a \Leftrightarrow \text{non}\,(|x| \geq a) \Leftrightarrow \text{non}\,(-a \leq x \text{ et } x \leq a) \Leftrightarrow (x < -a \text{ ou } x > a)$

■

2.5 Propriété de la borne supérieure

Définition 2.35. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est un *majorant* de A si

$$\forall x \in A,\ x \leq M.$$

Définition 2.36. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est un *minorant* de A si

$$\forall x \in A,\ m \leq x.$$

Définition 2.37. On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est majorée (resp. minorée) si elle admet un majorant (resp. minorant).

Définition 2.38. On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Définition 2.39. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.
On dit que S est la *borne supérieure* (ou le *supremum*) de A si S est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire si

1. $\forall x \in A,\ x \leq S$,
2. si T est un majorant de A alors $S \leq T$.

On note alors $\sup(A) = S$.

Définition 2.40. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $I \in \mathbb{R}$.
On dit que I est la *borne inférieure* (ou l'*infimum*) de A si I est le plus grand des minorants de A, c'est-à-dire si

1. $\forall x \in A,\ I \leq x$,
2. si J est un minorant de A alors $J \leq I$.

On note alors $\inf(A) = I$.

Remarque 2.41. Une partie de $\mathbb{R}$ peut ne pas admettre de borne supérieure (resp. inférieure). Par exemple $A =]0, +\infty[$ n'est pas majorée et n'admet donc pas plus petit majorant.

Remarque 2.42. Si un ensemble est majoré, il n'y a pas unicité d'**un** majorant (si M est un majorant alors $M + 1$ aussi). Mais **la** borne supérieure, si elle existe, est unique.
En effet, supposons que S_1 et S_2 soient deux bornes supérieures d'une partie $A \subset \mathbb{R}$.
Puisque S_1 est le plus petit majorant de A et que S_2 est un majorant de A, on a nécessairement $S_1 \leq S_2$. De même, on a aussi $S_2 \leq S_1$. Ainsi $S_1 = S_2$.

Fait 2.43. *Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.*

On en déduit aisément la proposition suivante :

Proposition 2.44. *Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée admet une borne inférieure.*

Démonstration. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et minorée. Posons $-A \coloneqq \{-x \ : \ x \in A\}$.
Puisque A est non-vide, il existe $x \in A$ et alors $-x \in -A$, donc $-A$ est non-vide.
Puisque A est minorée, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\ m \leq x$.
Montrons que $-A$ est majorée par $-m$.
Soit $y \in -A$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = -x$. Puisque $m \leq x$, il vient $y = -x \leq -m$.
On a bien montré que $\forall y \in -A,\ y \leq -m$.

Donc $S \coloneqq \sup(-A)$ est bien défini puisque $-A$ est une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$.
Montrons que $-S$ est la borne inférieure de A.

- Soit $x \in A$. Puisque S est un majorant de $-A$ et que $-x \in -A$, on a $-x \leq S$, soit $-S \leq x$.
  On a bien montré que $-S$ est un minorant de A puisque $\forall x \in A,\ -S \leq x$.
- Soit T un minorant de A.
  Soit $x \in -A$ alors il existe $a \in A$ tel que $x = -a$.
  Puisque T est un minorant de A, on a que $T \leq a$ et donc $-T \geq -a = x$.
  On a ainsi montré que $\forall x \in -A,\ -T \geq x$, c'est-à-dire que $-T$ est un majorant de $-A$.
  Puisque S est le plus petit des majorants de $-A$, il vient $S \leq -T$, d'où $T \leq -S$.
  On a bien montré que $-S$ est le plus grand des minorants de A.

■

Remarque 2.45. Dans les deux énoncés précédents, l'hypothèse *non-vide* est très importante. En effet, tout réel est un majorant de $\varnothing$, et ainsi $\varnothing$ n'admet pas de plus petit majorant.

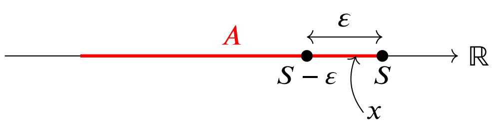
Remarque 2.46. Par convention, on note $\sup A = +\infty$ si A est une partie de $\mathbb{R}$ non-majorée et on note $\inf A = -\infty$ si A est une partie de $\mathbb{R}$ non-minorée.

La caractérisation suivante, *à la epsilon*, peut s'avérer utile dans certaines démonstrations.

Proposition 2.47. *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$, alors*

$$S = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq S \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ S - \varepsilon < x \end{cases}$$

La première ligne signifie simplement que S est un majorant de A. La deuxième ligne signifie quant à elle que S est le plus petit des majorants.
En effet, pour $\varepsilon > 0$ (même très petit), $S - \varepsilon < S$. Donc, si S est le plus petit des majorants, $S - \varepsilon$ ne peut pas être un majorant, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que $S - \varepsilon < x$.



Démonstration. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.

1. $\Rightarrow$: supposons que $S = \sup(A)$.

   Alors S est un majorant de A et donc $\forall x \in A,\ x \leq S$.

   On sait que si T est un majorant de A alors $S \leq T$. En passant à la contraposée, on obtient que si $T < S$ alors T n'est pas un majorant.
   Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $S - \varepsilon < S$, on déduit de la remarque précédente que $S - \varepsilon$ n'est pas un majorant, ce qui signifie qu'il existe $x \in A$ tel que $S - \varepsilon < x$.

2. $\Leftarrow$: supposons que
$$\begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq S \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ S - \varepsilon < x \end{cases}$$
D'après la première condition, on a bien que S est un majorant de A. Montrons qu'il s'agit du plus petit majorant.
Pour cela, on va montrer à la contraposée, à savoir que si $T < S$ alors T n'est pas un majorant.
Soit $T \in \mathbb{R}$ tel que $T < S$. Posons $\varepsilon \coloneqq S - T > 0$. Alors, d'après la deuxième condition, il existe $x \in A$ tel que $S - \varepsilon < x$, i.e. $T < x$.
Donc T n'est pas un majorant. ■

De la même façon, on a le résultat suivant :

Proposition 2.48. *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $I \in \mathbb{R}$, alors*
$$I = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ I \leq x \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x < I + \varepsilon \end{cases}$$

2.6 Intervalles

Définition 2.49. Une partie I de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* si
$$\forall x, y \in I,\ \forall z \in \mathbb{R},\ (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I).$$

De façon informelle, la définition précédente signifie simplement qu'un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$ d'un seul tenant, sans trou.

Proposition 2.50. *Les intervalles sont exactement les parties de $\mathbb{R}$ de la forme suivante où $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient $a < b$:*
- $\varnothing$
- $[a, a] = \{a\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Cette proposition découle immédiatement du lemme suivant :

Lemme 2.51. *Soit I un intervalle non-vide alors :*
- *Si I est minoré et majoré alors* $\big]\inf(I), \sup(I)\big[\subset I \subset \big[\inf(I), \sup(I)\big]$ *;*
- *Si I est minoré et non-majoré alors* $\big]\inf(I), +\infty\big[\subset I \subset \big[\inf(I), +\infty\big[$ *;*
- *Si I est non-minoré et majoré alors* $\big]-\infty, \sup(I)\big[\subset I \subset \big]-\infty, \sup(I)\big]$ *;*
- *Si I est non-minoré et non-majoré alors $I =]-\infty, +\infty[$.*

Démonstration.

- Supposons que I soit minoré et majoré.
  Soit $x \in I$ alors $\inf(I) \leq x \leq \sup(I)$ puisque $\inf(I)$ est un minorant de I et $\sup(I)$ est un majorant de I. Donc $I \subset \left[\inf(I), \sup(I)\right]$.
  Soit $x \in \left]\inf(I), \sup(I)\right[$.
  Puisque $x > \inf(I)$, x n'est pas un minorant de I et il existe donc $y \in I$ tel que $y < x$.
  Puisque $x < \sup(I)$, x n'est pas un majorant de I et il existe donc $z \in I$ tel que $x < z$.
  On a ainsi $y < x < z$ avec $y, z \in I$, donc $x \in I$ puisque I est un intervalle.
  On a bien montré que $\left]\inf(I), \sup(I)\right[\subset I$.

- Supposons que I soit minoré et non-majoré.
  Soit $x \in I$ alors $\inf(I) \leq x$ puisque $\inf(I)$ est un minorant de I. Donc $I \subset \left[\inf(I), +\infty\right[$.
  Soit $x \in \left]\inf(I), +\infty\right[$.
  Puisque $x > \inf(I)$, x n'est pas un minorant de I et il existe donc $y \in I$ tel que $y < x$.
  Puisque I n'est pas majoré, il existe $z \in I$ tel que $x < z$.
  On a ainsi $y < x < z$ avec $y, z \in I$, donc $x \in I$ puisque I est un intervalle.
  On a bien montré que $\left]\inf(I), +\infty\right[\subset I$.

Les deux autres points se démontrent de façon similaire. ■

2.7 Propriété archimédienne

Le résultat suivant énonce qu'il n'existe pas de réels infinitésimaux (i.e. infiniment petits ou infiniment grands). Si on considère $\varepsilon > 0$, aussi petit soit-il, et $A > 0$, aussi grand soit-il, on peut toujours dépasser A en sommant ε avec lui-même suffisamment de fois[13]. Cette propriété peut sembler évidente, mais elle ne l'est pas : il existe des corps totalement ordonnés admettant des infinitésimaux.

Théorème 2.52 ($\mathbb{R}$ est archimédien)**.** $\forall \varepsilon > 0,\ \forall A > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ n\varepsilon > A$.

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$.
Supposons par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N},\ n\varepsilon \leq A$.
Alors $E \coloneqq \{n\varepsilon \ :\ n \in \mathbb{N}\}$ est non-vide et majoré. Ainsi $M \coloneqq \sup E$ est bien défini.
Puisque $M - \varepsilon < M$, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > M - \varepsilon$.
Ainsi $(n+1)\varepsilon > M$, d'où une contradiction. ■

Le caractère archimédien de $\mathbb{R}$ est équivalent[14] à chacun des deux énoncés suivants, qui vous semblent très naturels puisque vous les utilisez depuis longtemps.

Proposition 2.53. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien (en prenant $A = 1$), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N\varepsilon > 1$, i.e. $\frac{1}{N} < \varepsilon$ (remarquons que $N > \frac{1}{\varepsilon} > 0$).
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n \geq N$ alors $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.
On a bien montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n \geq N \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon$. ■

[13] Les petits ruisseaux font les grandes rivières : en superposant des grains de sable les uns au-dessus des autres, à un moment donné on dépassera le Kilimanjaro.

[14] Pour chacun, on ne montrera que l'implication comme conséquence du caractère archimédien mais la réciproque est aussi vraie (et facile à montrer : exercice !).

Proposition 2.54. *L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré.*

Démonstration. On veut montrer la négation de "$\mathbb{N}$ est majoré", c'est-à-dire la négation de $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leq M$, à savoir $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > M$.
Soit $M \in \mathbb{R}$.

- Si $M \leq 0$ alors $n = 1 \in \mathbb{N}$ vérifie $n > M$.
- Si $M > 0$ alors, puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > M$. ∎

2.8 Partie entière

Proposition 2.55. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.*
On dit que n est la partie entière *de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrons d'abord l'existence.

- *Premier cas : si $x \geq 0$.*
  Posons $E \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \ : \ x < n\}$.
  Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > x$. Ainsi $E \neq \varnothing$.
  Puisque $\mathbb{N}$ est bien ordonné, E admet un plus petit élément $p \coloneqq \min(E)$.
  Puisque $p \in E$, on a $x < p$.
  De plus, $p > x \geq 0$, d'où $p - 1 \in \mathbb{N}$. Comme $p - 1 \notin E$, on a nécessairement $p - 1 \leq x$.
  Ainsi $n \coloneqq p - 1$ vérifie $n \leq x < n + 1$.
- *Deuxième cas : si $x < 0$.*
  On montre de façon similaire que $n \coloneqq -\min(F)$ convient, où $F \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \ : \ -x \leq n\}$.

Montrons maintenant l'unicité. Supposons que $n, n' \in \mathbb{Z}$ vérifient

$$n \leq x < n + 1 \tag{1}$$

et

$$n' \leq x < n' + 1.$$

On déduit de la dernière inégalité que

$$-n' - 1 < -x \leq -n'. \tag{2}$$

En sommant (1) et (2), on obtient que $n - n' - 1 < 0 < n - n' + 1$.
Ainsi on a $-1 < n' - n < 1$ et $n' - n \in \mathbb{Z}$. Donc $n = n'$. ∎

Remarque 2.56. On déduit de $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

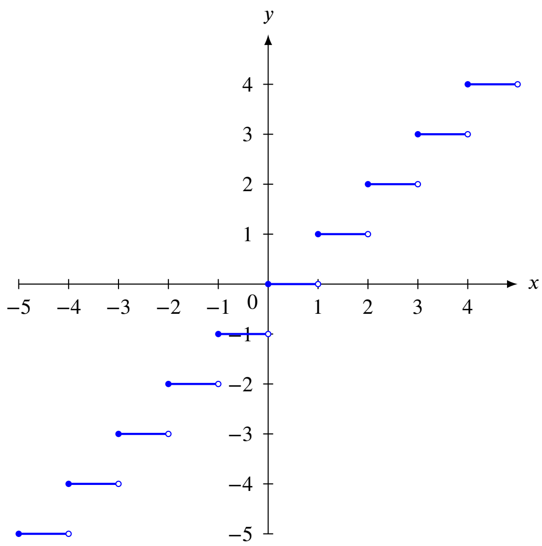


FIG. : Graphe de $y = \lfloor x \rfloor$

2.9 Quelques nombres irrationnels

2.9.1 $\sqrt{2}$ est irrationnel

Théorème 2.57. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Démonstration par le théorème fondamental de l'arithmétique.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$. Alors $2b^2 = a^2$.
La décomposition primaire du terme de gauche contient un nombre impair de facteurs premiers (comptés avec les exposants) alors que la décomposition primaire du terme de droite contient un nombre pair de facteurs premiers (comptés avec les exposants).
Ce qui contredit l'unicité de la factorisation en facteurs premiers. ■

Démonstration par le lemme d'Euclide.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$.
Alors $2b^2 = a^2$ d'où $2|a^2$.
D'après le lemme d'Euclide, $2|a$ et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k$.
Puis $2b^2 = a^2 = 4k^2$, i.e. $b^2 = 2k^2$. Donc $2|b^2$ et ainsi $2|b$, toujours d'après le lemme d'Euclide.
Donc $2| \operatorname{pgcd}(a, b) = 1$. D'où une contradiction. ■

Démonstration par le lemme de Gauss.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$.
Alors $2b^2 = a^2$ d'où $b|a^2$.
Puisque $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$, on déduit du lemme de Gauss que $b|1$ et donc $b = 1$. Ainsi $a^2 = 2$, or

- si $a \equiv 0 \mod 3$ alors $a^2 \equiv 0 \mod 3$,
- si $a \equiv 1 \mod 3$ alors $a^2 \equiv 1 \mod 3$ et
- si $a \equiv 2 \mod 3$ alors $a^2 \equiv 1 \mod 3$.

D'où une contradiction. ■

Démonstration par descente infinie.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
Alors $a^2 = 2b^2$, d'où $a(a - b) = a^2 - ab = 2b^2 - ab = b(2b - a)$. Donc $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$.
Puisque $1 < \sqrt{2} = \frac{a}{b}$, on a $0 < a - b$. Et ainsi $0 < 2b - a$, d'où $a - b < b$.
En répétant ce processus, on construit une suite infinie de fractions $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots$ où $a_k > 0$ et $0 < b_{k+1} < b_k$.
Ce qui est impossible puisqu'il n'existe pas de suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante. ■

Démonstration par congruence.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$.

- Premier cas : si $a \equiv 0 \mod 3$ et $b \equiv 0 \mod 3$, alors $3 | \operatorname{pgcd}(a, b) = 1$,
- Deuxième cas : si $a \equiv \pm 1 \mod 3$ et $b \equiv 0 \mod 3$, alors $0 = a^2 - 2b^2 \equiv 1 \mod 3$,
- Troisième cas : si $a \equiv 0 \mod 3$ et $b \equiv \pm 1 \mod 3$, alors $0 = a^2 - 2b^2 \equiv 1 \mod 3$,
- Quatrième cas : si $a \equiv \pm 1 \mod 3$ et $b \equiv \pm 1 \mod 3$, alors $0 = a^2 - 2b^2 \equiv 2 \mod 3$.

Dans tous les cas, on obtient une contradiction. ■

Démonstration par le principe du bon ordre.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$. Alors $a = b\sqrt{2}$.

Ainsi $E \coloneqq \left\{ n \in \mathbb{N} \;:\; n\sqrt{2} \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ est non-vide puisque $b \in E$.

Puisque $\mathbb{N}$ est bien ordonné, E admet un plus petit élément $p \coloneqq \min(E)$. Alors $p\sqrt{2} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Posons $q \coloneqq p\sqrt{2} - p$. Alors $q \in \mathbb{Z}$. De plus $q = p(\sqrt{2} - 1)$ de sorte que $0 < q < p$.

Mais $q\sqrt{2} = 2p - p\sqrt{2} = p - q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Donc $q \in E$.

D'où une contradiction puisque $q \in E$ et $q < p = \min(E)$. ■

Démonstration par la propriété archimédienne.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n \coloneqq \left(\sqrt{2} - 1\right)^n$. On peut démontrer par récurrence ou en utilisant la formule du binôme de Newton que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $u_n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

Puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, on déduit de $2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2$ que $0 < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$.

On a ainsi que $0 < u_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Supposons par contradiction que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N}$ et $q \neq 0$ alors

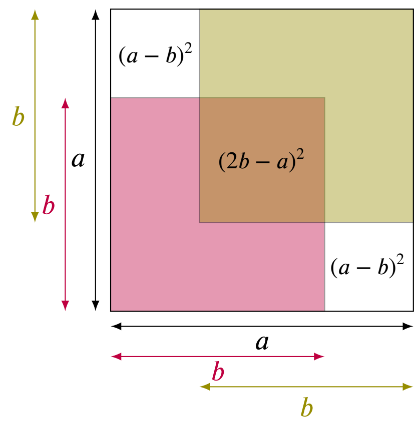
$$u_n = a_n + b_n\sqrt{2} = a_n + b_n\frac{p}{q} = \frac{qa_n + pb_n}{q}.$$

Puisque $u_n > 0$, on a $|qa_n + pb_n| \geq 1$ et $u_n \geq \frac{1}{q}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{q} \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Ce qui contredit la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$ (ou que $\lim \frac{1}{2^n} = 0$). ■

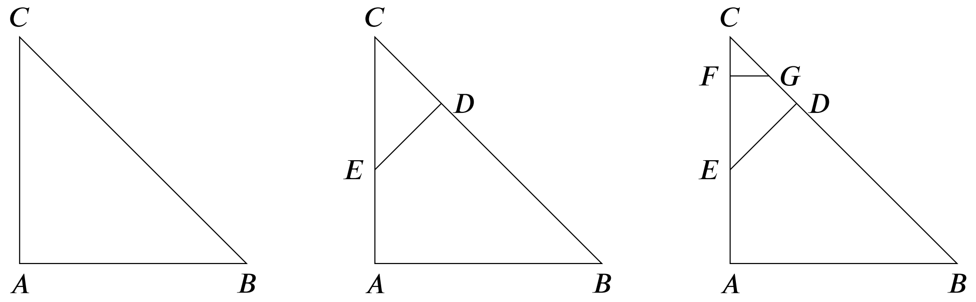
Une version géométrique de la descente infinie.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$. Alors $a = \sqrt{2}b > b$.



L'aire du carré au centre est $\mathcal{A} = (2b-a)^2$.
De plus, par le principe d'inclusion-exclusion, $2(a-b)^2 + 2b^2 - \mathcal{A} = a^2$.
Donc $\mathcal{A} = 2(a-b)^2 + 2b^2 - a^2 = 2(a-b)^2$ puisque $a^2 = 2b^2$.
Ainsi $2(a-b)^2 = \mathcal{A} = (2b-a)^2$, d'où $2 = \frac{(2b-a)^2}{(a-b)^2}$.
Donc $\sqrt{2} = \frac{2b-a}{a-b}$ avec $0 < 2b - a$ et $0 < a - b < b$.
En répétant ce processus, on construit une suite infinie de fractions $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots$ où $a_k > 0$ et $0 < b_{k+1} < b_k$.
Ce qui est impossible puisqu'il n'existe pas de suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante. ∎

Démonstration classique.
Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sqrt{2}$.
Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel alors $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$ sont commensurables[15], i.e. ils s'écrivent tous deux comme multiples entiers d'une même longueur[16] d.
Choisissons D sur $[BC]$ tel que $\overline{BD} = \overline{AB}$.
Notons par E l'intersection de (AC) avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par D.
On remarque[17] alors que $\overline{AE} = \overline{ED} = \overline{DC}$.
Donc $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{AB}$ et $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = \overline{AB} - (\overline{BC} - \overline{AB}) = 2\overline{AB} - \overline{BC}$.
Ainsi $\overline{CD}$ et $\overline{EC}$ sont des multiples entiers de d.
De plus, DEC est isocèle et rectangle en D, ce qui permet de répéter cette construction avec le triangle DEC de sorte à construire une suite infinie de segment $(AC, EC, FC, \dots)$ qui sont tous multiples entiers de d mais dont la longueur diminue.
Ce qui est impossible. ∎

[15] C'est la définition originale, en Grèce antique, de la rationalité.
[16] Si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, on pose $d \coloneqq \frac{\overline{AB}}{b}$ et alors $\overline{AB} = bd$ et $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB} = \frac{a}{b}bd = ad$.
[17] Les triangles BAE et BDE sont rectangles en A et D, respectivement, d'hypothénuse commune, et $\overline{AB} = \overline{DB}$, donc $\overline{AE} = \overline{ED}$ d'après le théorème de Pythagore. De plus le triangle CDE est isocèle et rectangle en A donc $\overline{ED} = \overline{DC}$.



La dernière démonstration est encore une version géométrique de la descente infinie :

- Algébriquement : $\dfrac{2b-a}{a-b} = \dfrac{2-a/b}{a/b-1} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$.
- Géométriquement : $\dfrac{2\overline{AB}-\overline{BC}}{\overline{BC}-\overline{AB}} = \dfrac{\overline{EC}}{\overline{CD}} = \sqrt{2}$.

2.9.2 e est irrationnel

Théorème 2.58. $e \notin \mathbb{Q}$

Première démonstration.
On rappelle que $e \coloneqq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.
Supposons par l'absurde que $e = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors $b > 1$ puisque $e \notin \mathbb{N}$. De plus,

$$b!\left(e - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = b!\left(\sum_{n \geq b+1} \frac{1}{n!}\right).$$

On obtient une contradiction en remarquant que le terme de gauche est un entier alors que le terme de droite n'en est pas un ; en effet :

$$0 < b!\left(\sum_{n \geq b+1} \frac{1}{n!}\right) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(b+1)^n} = \frac{1}{b} < 1.$$

■

Deuxième démonstration.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n \coloneqq \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$.
Par récurrence et en utilisant la formule d'intégration par parties, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $u_n = a_n + e b_n$.
Supposons par l'absurde que $e = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Alors $0 < u_n = a_n + b_n \frac{p}{q} = \frac{q a_n + p b_n}{q}$.
Puisque $u_n > 0$, on a que $q a_n + p b_n \geq 1$ et que $u_n \geq \frac{1}{q}$.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \dfrac{1}{q} \leq u_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^n e \mathrm{d}x = \frac{e}{n+1}$.
D'où une contradiction en faisant tendre n vers l'infini. ■

2.10 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 2.59 ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q},\ x < q < y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Posons $\varepsilon \coloneqq y - x > 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n\varepsilon > 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Posons $m \coloneqq \lfloor nx \rfloor + 1$. Alors $nx < m \leq nx + 1$, et donc $x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = y$.
Ainsi $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ vérifie $x < q < y$. ■

Remarque 2.60. Le théorème précédent est équivalent au fait que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.

Corollaire 2.61. *Soit I un intervalle non-vide et non réduit à un point, alors $I \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.*

Démonstration. Puisque I n'est pas vide et n'est pas un singleton, il existe $x, y \in I$ tels que $x < y$.
Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.
Puisque I est un intervalle, on a que $q \in I$.
Ainsi $q \in I \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$. ■

Proposition 2.62. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies (\exists s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x < s < y)$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
D'après le théorème 2.59, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.
De même, il existe $p \in \mathbb{Q}$ tel que $x < p < q$.
Ainsi, on $p, q \in \mathbb{Q}$ vérifiant $x < p < q < y$.
Posons $s \coloneqq p + \frac{\sqrt{2}}{2}(q - p)$. Alors[18] $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $p < s < q$ puisque $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.
On a bien construit $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vérifiant $x < s < y$. ■

Corollaire 2.63. *Soit I un intervalle non-vide et non réduit à un point, alors $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$.*

2.11 Fonctions réelles

Définition 2.64. Soit $f : A \to B$ une fonction où $B \subset \mathbb{R}$.

- On dit que f est *majorée* si $\mathrm{Im}(f)$ est majorée, i.e.
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ f(x) \leq M.$$
- On dit que f est *minorée* si $\mathrm{Im}(f)$ est minorée, i.e.
$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ m \leq f(x).$$
- On dit que f est *bornée* si f est minorée et majorée, i.e.
$$\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ m \leq f(x) \leq M$$
ou encore
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ |f(x)| \leq M.$$

[18] Sinon on aurait $\sqrt{2} = 2\frac{s-p}{q-p} \in \mathbb{Q}$.

Définition 2.65. Soit $f : A \to B$ une fonction où $A, B \subset \mathbb{R}$.

- On dit que f est *croissante* si
$$\forall x, y \in A,\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$
- On dit que f est *décroissante* si
$$\forall x, y \in A,\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$
- On dit que f est *monotone* si f est croissante ou décroissante.
- On dit que f est *strictement croissante* si
$$\forall x, y \in A,\ x < y \implies f(x) < f(y).$$
- On dit que f est *strictement décroissante* si
$$\forall x, y \in A,\ x < y \implies f(x) > f(y).$$
- On dit que f est *strictement monotone* si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

2.12 Exercices

Exercice 1. Déterminer l'image des fonctions suivantes :

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} [-2,3]\times[2,4] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} [-1,1]\times[-2,3] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-y \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} [2,3]\times[-2,-1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} [-6,-3]\times[2,4] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x}{y} \end{array}$

Exercice 2. Montrer que les nombres suivants sont des entiers :

1. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$
2. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

Exercice 3.

1. Montrer que $\forall a,b\in\mathbb{R},\ ab\leq\dfrac{a^2+b^2}{2}$.
2. (a) Montrer que $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ ab+bc+ac\leq a^2+b^2+c^2$.
   (b) Montrer que $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ 3ab+3bc+3ac\leq(a+b+c)^2$.
3. (a) Montrer que $\forall a,b\in[0,+\infty[,\ \sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}$ (*inégalité arithmético-géométrique*).
   (b) Montrer que $\forall a,b,c\in[0,+\infty[,\ (a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$.
   (c) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ \dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$.

Exercice 4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1$.

Exercice 5. Soient $a_1,a_2,\dots,a_n,b_1,b_2,\dots,b_n\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2x\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geq 0$.
2. En déduire l'*inégalité de Cauchy–Schwarz* : $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$.
3. Étudier le cas d'égalité.
4. Applications.
   (a) Montrer que $\forall x_1,\dots,x_n\geq 0,\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\leq\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}$.
   (b) On considère deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$. On note $\alpha_i=\overline{A_iB_i}$, $\beta_i=\overline{B_iC_i}$ et $\gamma_i=\overline{A_iC_i}$.
   Montrer que $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ sont semblables si et seulement si
   $$\sqrt{\alpha_1\alpha_2}+\sqrt{\beta_1\beta_2}+\sqrt{\gamma_1\gamma_2}=\sqrt{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)}$$

Exercice 6.

1. Résoudre $|x^2-1|<x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
2. Résoudre $|x^2-4x+3|=2x+3$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
3. Résoudre $|2x|\geq x^2-1$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 7. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ |x-1|\leq x^2-x+1$.

Exercice 8.
1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \qquad \text{et} \qquad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$x = \max(x, 0) + \min(x, 0) \qquad \text{et} \qquad |x| = \max(x, 0) - \min(x, 0).$$

Exercice 9.
1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.
2. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \dfrac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \dfrac{|x|}{1 + |x|} + \dfrac{|y|}{1 + |y|}$.

Exercice 10. Étant donné une partie $E \subset \mathbb{R}$, on rappelle que l'on dénote par $\max(E)$ le plus grand élément de E (s'il existe) et par $\sup(E)$ la borne supérieure de E (si elle existe).
Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant :
1. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet un plus grand élément alors E admet une borne supérieure.
2. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet un plus grand élément alors $\max(E) = \sup(E)$.
3. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure alors E admet un plus grand élément.
4. Si $E \subset \mathbb{R}$ est majorée alors E admet une borne supérieure.
5. Si $E \subset \mathbb{R}$ est majorée et non-vide alors E admet un plus grand élément.
6. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure alors E est majorée.
7. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet un plus grand élément alors E est non-vide.

Exercice 11. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$, déterminer, lorsqu'ils existent, les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément :

(1) $[-\pi, 42[$

(2) $\left\{x \in \mathbb{R} \ :\ x^2 < 2\right\}$

(3) $[0, 1[\cap\mathbb{Q}$

(4) $\mathbb{N}$

(5) $\left\{\frac{1}{n} \ :\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

(6) $\left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \ :\ n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

(7) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \ :\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

(8) $\left\{\frac{n}{mn+1} \ :\ n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

(9) $\left\{\frac{n}{mn+1} \ :\ n, m \in \mathbb{N}\right\}$

Exercice 12. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant).
Lorsque l'assertion est vraie, on précisera la relation entre les bornes inférieures/supérieures considérées.
1. Si A admet une borne supérieure alors B admet une borne inférieure.
2. Si A admet une borne supérieure alors B admet une borne supérieure.
3. Si A admet une borne inférieure alors B admet une borne inférieure.
4. Si B admet une borne supérieure alors A admet une borne supérieure.
5. Si B admet une borne inférieure alors A admet une borne inférieure.

Exercice 13. Soient A et B deux parties non-vides et majorées de $\mathbb{R}$.
1. On pose $A + B := \{a + b \ :\ a \in A \text{ et } b \in B\}$ (*somme de Minkowski*).
   (a) Montrer que $A + B$ est non-vide et majorée.
   (b) Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. On pose $-A := \{-a \ :\ a \in A\}$.
   (a) Montrer que $-A$ est non-vide et minorée.
   (b) Montrer que $\inf(-A) = -\sup(A)$.

3. (a) Montrer que $A \cup B$ est non-vide et majorée.
   (b) Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

Exercice 14. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq b.$$

1. Montrer que A admet une borne supérieure et que B admet une borne inférieure.
2. Montrer que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 15. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ de sorte que $\inf(A)$ et $\sup(B)$ existent.
1. Montrer que si $\inf(A) = \sup(B)$ alors $A \cap B$ contient au plus un élément.
2. Sous l'hypothèse que $\inf(A) = \sup(B)$, l'intersection $A \cap B$ peut-elle être vide ?

Exercice 16. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et bornée. On pose $B := \{|x-y| \ :\ x, y \in A\}$.
1. Montrer que B admet une borne supérieure.
2. Montrer que $\sup B = \sup A - \inf A$.

Exercice 17. Montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est croissante alors f admet un point fixe, i.e. $\exists a \in [0,1],\ f(a) = a$.
Indice : considérer $\{x \in [0,1] \ :\ f(x) \geq x\}$.

Exercice 18. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et majorée. Posons $M := \sup(A)$.
Montrer que si $M \notin A$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $]M-\varepsilon, M[\cap A$ est infini.

Exercice 19.
1. Montrer que la fonction partie entière est croissante.
2. (a) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
   (b) En déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0,1\}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 20. Donner une expression fermée du nombre de chiffres d'un entier strictement positif à l'aide du logarithme décimal et de la partie entière.
Rappel : le logarithme décimal est la fonction $\log :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Exercice 21.
1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor}{n^2}$.
2. En déduire que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.
3. Donner une démonstration alternative utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 22. Soient I et J deux intervalles.
1. Montrer que $I \cap J$ est un intervalle.
2. Montrer que la somme de Minkowski $I + J$ est un intervalle.
3. (a) Montrer que si $I \cap J \neq \varnothing$ alors $I \cup J$ est un intervalle.
   (b) Montrer que l'hypothèse de la question précédente n'est pas superflue.

Exercice 23. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.
Montrer que $(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \varnothing \implies I \cap J = \varnothing$.

Exercice 24. On définit l'ensemble des nombres dyadiques par $D := \left\{ \frac{m}{2^n} \ :\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.
Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$, i.e. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies \exists d \in D,\ x < d < y$.

Exercice 25.
1. La somme de deux nombres irrationnels est-elle nécessairement irrationnelle ?
2. Le produit de deux nombres irrationnels est-il nécessairement irrationnel ?
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ x + y \notin \mathbb{Q}$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ xy \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 26. Montrer que les nombres suivants sont irrationnels :

(a) $\sqrt{3}$
(b) $\sqrt{6}$
(c) $\sqrt{11}$
(d) $\sqrt[3]{3+\sqrt{11}}$
(e) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$
(f) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
(g) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$
(h) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2$
(i) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$.
(j) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$

Exercice 27. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N},\ n = m^2$.

Exercice 28 (Difficile : irrationalité de π)**.**

1. Soient $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$F(x) \coloneqq \sum_{k\geq 0}(-1)^k r^{2n-2k} f^{(2k+1)}(x).$$
(*on peut remarquer que la somme ci-dessus est finie puisque f est un polynôme*).
   (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.
   (c) Montrer que $F''(x) = -r^2F(x) + r^{2n+2}f(x)$.
   (d) Calculer $\frac{d}{dx}\left(F'(x)\sin(rx) - rF(x)\cos(rx)\right)$.
   (e) En déduire une expression de $\int_0^1 f(x)\sin(rx)dx$.
2. Montrer que $\forall r \in]0,\pi],\ r \in \mathbb{Q} \implies (\sin(r) \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \cos(r) \notin \mathbb{Q})$.
3. En déduire que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

3 Limites

3.1 Limite en un point

Définition 3.1. Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est adhérent à D si

$$\forall \varepsilon > 0,\ [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap D \neq \varnothing.$$

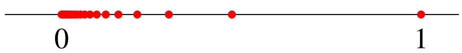
Remarque 3.2. Un élément $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à une partie $D \subset \mathbb{R}$ si tout intervalle centré en a, aussi petit soit-il, contient un élément de D.
Cela signifie que l’on peut approcher a par des éléments de D : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in D,\ |x-a| \leq \varepsilon$.

Exemple 3.3. Si $a \in D$ alors a est adhérent à D puisque

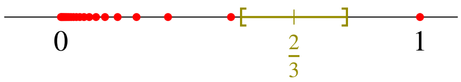
$$\forall \varepsilon > 0,\ a \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap D.$$

Exemple 3.4. 0 est adhérent à $]0,1[$.
En effet, soit $\varepsilon > 0$. Posons $x := \min(\varepsilon, 1/2)$, alors $x \in [-\varepsilon,\varepsilon] \cap]0,1[$.
On a bien montré que $\forall \varepsilon > 0,\ [-\varepsilon,\varepsilon] \cap]0,1[\neq \varnothing$.

Exemple 3.5. Considérons $D := \left\{ \frac{1}{n} \ :\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

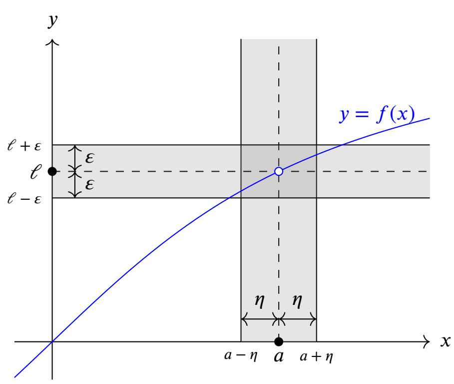


- 0 est adhérent à D :
  Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n\varepsilon > 1$, i.e. $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
  Donc $\frac{1}{n} \in [-\varepsilon,\varepsilon] \cap D$.
- $\frac{2}{3}$ n’est pas adhérent à D :
  Posons $\varepsilon := \frac{1}{7} > 0$ alors $\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{7}, \frac{2}{3}+\frac{1}{7}\right] = \left[\frac{11}{21}, \frac{17}{21}\right]$.
  Alors $\frac{1}{2} < \frac{11}{21} < \frac{17}{21} < 1$ et donc $\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{7}, \frac{2}{3}+\frac{1}{7}\right] \cap D = \varnothing$.



Définition 3.6. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et a un réel adhérent à D.
On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon.$$



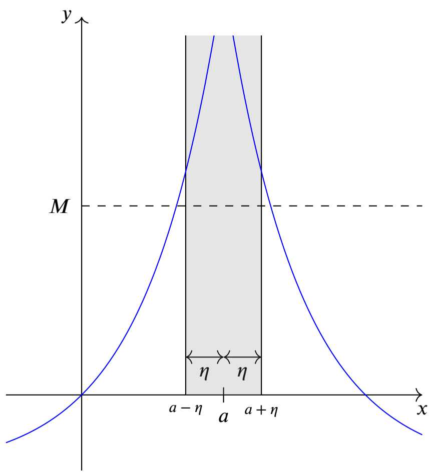
Attardons-nous sur cette première définition pour bien en comprendre la signification :

1. On commence par fixer un $\varepsilon > 0$ ce qui revient à fixer une bande horizontale centrée en $y = \ell$ de hauteur 2ε.
   On cherche ensuite un $\eta > 0$ tel qu'à l'intérieur de la bande verticale centrée en $x = a$ et de largeur 2η, le graphe de f se situe dans la bande horizontale, c'est-à-dire dans le rectangle en gris foncé sur la figure.
2. Le choix de η peut donc dépendre de ε : on voit bien sur la figure ci-dessus que plus $\varepsilon > 0$ est petit, plus il faudra choisir un $\eta > 0$ petit.

Ainsi, $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ signifie que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche de ℓ que l'on veut en prenant x suffisamment proche de a.

Définition 3.7. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et a un réel adhérent à D. On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a, noté $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq M.$$



Attardons-nous sur la signification de cette deuxième définition :

1. On commence par fixer un nombre $M \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite un $\eta > 0$ tel qu'à l'intérieur de la bande verticale centrée en $x = a$ et de largeur 2η, le graphe de f se situe au-dessus de la droite $y = M$.
2. Le choix de η peut donc dépendre de M : on voit bien sur la figure ci-dessus que plus M est grand, plus il faudra choisir un $\eta > 0$ petit.

Définition 3.8. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et a un réel adhérent à D. On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a, noté $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \leq M.$$

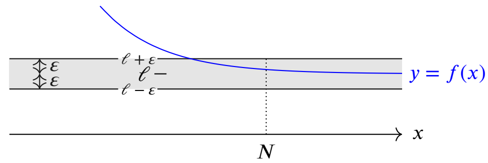
Remarque 3.9. Dans les trois définitions ci-dessus, le fait que a soit adhérent à D nous assure que, pour $\eta > 0$ fixé, il existe bien au moins un élément $x \in D$ tel que $|x - a| \leq \eta$.
Formellement, cela signifie que l'on ne peut pas trouver un $\eta > 0$ tel que l'hypothèse de l'implication soit fausse pour tout $x \in D$ (sinon, l'implication serait vraie pour n'importe quel ℓ).
Intuitivement, calculer la limite d'une fonction f en a signifie étudier le comportement de $f(x)$ lorsque x s'approche de a, il faut donc bien pouvoir approcher a par des éléments du domaine de f.

3.2 Limite à l'infini

Définitions 3.10. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ non majorée.

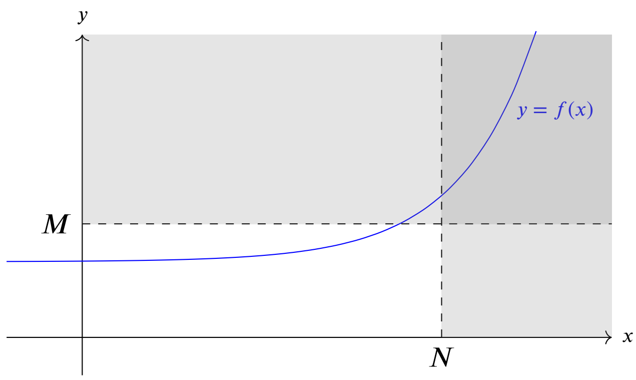
- On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$, noté $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \geq N \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



- On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, noté $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \geq N \implies f(x) \geq M.$$



- On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, noté $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, si

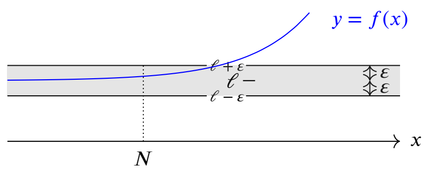
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \geq N \implies f(x) \leq M.$$

Remarque 3.11. Formellement, l'hypothèse que D est non majoré nous assure que, pour $N \in \mathbb{R}$ fixé, il existe bien $x \in D$ tel que $x \geq N$. Sans cela, il se pourrait que l'hypothèse de l'implication soit fausse pour tout $x \in D$ et donc que l'énoncé soit vrai quelque soit ℓ.
Intuitivement, étudier la limite de f en l'infini revient à étudier $f(x)$ lorsque x est aussi grand souhaité : il faut donc bien que le domaine ne soit pas majoré.

Définitions 3.12. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ non minorée.

- On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $-\infty$, noté $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \leq N \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



- On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, noté $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \leq N \implies f(x) \geq M.$$

- On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, noté $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, si

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \leq N \implies f(x) \leq M.$$

3.3 Unicité

Proposition 3.13. *Dans les définitions précédentes, si la limite existe alors elle est unique ; i.e. soient $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell, \tilde{\ell} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \tilde{\ell}$ alors $\ell = \tilde{\ell}$.*

Démonstration. Nous ne démontrons le résultat que pour une limite en un point ; les autres résultats se démontrent de façon analogue.
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et a un réel adhérent à D.

- Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \tilde{\ell}$ où $\ell, \tilde{\ell} \in \mathbb{R}$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que
  $$\forall x \in D,\ |x-a| \le \eta_1 \implies |f(x) - \ell| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$
  De même, puisque $\lim_{x\to a} f(x) = \tilde{\ell}$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que
  $$\forall x \in D,\ |x-a| \le \eta_2 \implies |f(x) - \tilde{\ell}| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$
  Puisque a est adhérent à D, il existe $x \in D$ tel que $|x - a| \le \min(\eta_1, \eta_2)$. Alors,
  $$|\ell - \tilde{\ell}| = |\ell - f(x) + f(x) - \tilde{\ell}| \le |f(x) - \ell| + |f(x) - \tilde{\ell}| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
  On a donc montré que $\forall \varepsilon > 0,\ |\ell - \tilde{\ell}| \le \varepsilon$, donc $|\ell - \tilde{\ell}| = 0$, c'est-à-dire $\ell - \tilde{\ell} = 0$ et ainsi $\tilde{\ell} = \ell$.
- Supposons par l'absurde que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$, et $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.
  Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que
  $$\forall x \in D,\ |x-a| \le \eta_1 \implies |f(x) - \ell| \le 1.$$
  Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que
  $$\forall x \in D,\ |x-a| \le \eta_2 \implies f(x) \ge \ell + 2.$$
  Puisque a est adhérent à D, il existe $x \in D$, il existe $x \in D$ tel que $|x - a| \le \min(\eta_1, \eta_2)$.
  Alors, $f(x) \le \ell + 1$ et $f(x) \ge \ell + 2$, d'où une contradiction.

■

3.4 Quelques exemples à la main

Exemple 3.14. Montrons que $\lim_{x\to 1} x^3 + 2x = 3$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Posons $\eta \coloneqq \min\left(1, \frac{\varepsilon}{9}\right)$ alors $\eta > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 1| \le \eta$.
Alors $|x - 1| \le 1$ d'où $0 \le x \le 2$ et $0 \le x^2 \le 4$. Ainsi $0 \le x^2 + x + 3 \le 9$.
Puis
$$|x^3 + 2x - 3| = |(x-1)(x^2 + x + 3)| = |x-1||x^2 + x + 3| \le 9\eta \le 9\frac{\varepsilon}{9} = \varepsilon.$$
On a bien montré que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| \le \eta \implies |(x^3 + 2x) - 3| \le \varepsilon.$$

Exemple 3.15. Montrons que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N\varepsilon \geq 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq N$, alors $\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon$.
On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq N \implies \left|\frac{1}{x} - 0\right| \leq \varepsilon.$$

Exemple 3.16. Montrons qu'il n'existe pas de réel ℓ tel que $\lim_{x\to+\infty} \cos(\pi x) = \ell$.
En passant à la négation, on veut montrer que

$$\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x \geq N \text{ et } |\cos(\pi x) - \ell| > \varepsilon.$$

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Posons $\varepsilon \coloneqq \frac{1}{2} > 0$.
Soit $N \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \frac{N}{2}$.
Alors

- Premier cas : $|1 - \ell| > \varepsilon$.
  Posons $x \coloneqq 2n$, alors $x \geq N$ et $|\cos(\pi x) - \ell| = |1 - \ell| > \varepsilon$.

- Deuxième cas : $|1 - \ell| \leq \varepsilon$.
  Alors $-\frac{5}{2} = -2 - \varepsilon \leq -1 - \ell \leq -2 + \varepsilon = -\frac{3}{2}$ et donc $|-1-\ell| \geq \frac{3}{2} > \varepsilon$.
  Posons $x \coloneqq 2n+1$, alors $x \geq N$ et $|\cos(\pi x) - \ell| = |-1-\ell| > \varepsilon$.

3.5 Limites à droite et à gauche en un point

Définition 3.17. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $a \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a si la restriction $f_{|]-\infty,a[\cap D}$ tend vers ℓ en a, on note alors

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \coloneqq \lim_{x\to a} f_{|]-\infty,a[\cap D} = \ell.$$

On dit que f admet ℓ pour limite à droite en a si la restriction $f_{|]a,+\infty[\cap D}$ tend vers ℓ en a, on note alors

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \coloneqq \lim_{x\to a} f_{|]a,+\infty[\cap D} = \ell.$$

Remarque 3.18. Pour que f admette une limite à gauche (resp. à droite) en a, il faut que a soit adhérent à $]-\infty, a[\cap D$ (resp. $]a; +\infty[\cap D$).

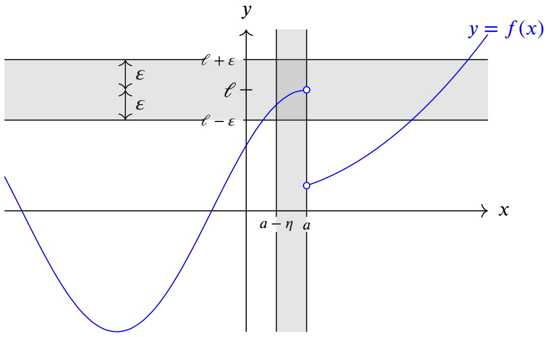
Remarque 3.19. Si une limite à droite ou à gauche existe alors elle est unique. En effet, par définition, il s'agit d'une limite en un point au sens usuel (mais de la restriction d'une fonction), donc la Proposition 3.13 s'applique.

Proposition 3.20. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.*
Supposons que a soit adhérent à $]-\infty, a[\cap D$, alors

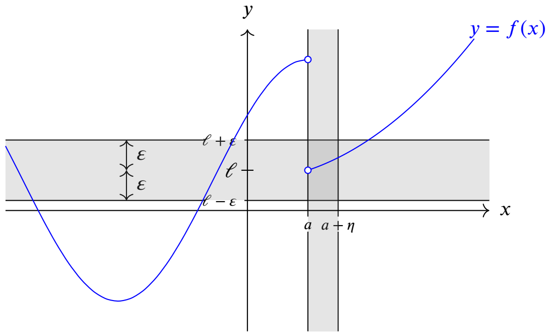
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ 0 < a - x \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Supposons que a soit adhérent à $]a, +\infty[\cap D$, alors

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ 0 < x - a \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



$$\ell = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$$



$$\ell = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$

Remarque 3.21. Par définition, les limites à droite et à gauche en a ne tiennent pas compte de la valeur de la fonction en a. C'est une différence[19] subtile avec la définition de la limite en un point où, si $a \in D$, il faut nécessairement que $f(a) = \ell$ pour que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Proposition 3.22. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.*
Supposons que a soit adhérent à $]-\infty, a[\cap D$, alors

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ 0 < a - x \leq \eta \implies f(x) > M$$

et

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ 0 < a - x \leq \eta \implies f(x) < M.$$

Supposons que a soit adhérent à $]a, +\infty[\cap D$, alors

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ 0 < x - a \leq \eta \implies f(x) > M$$

et

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ 0 < x - a \leq \eta \implies f(x) < M.$$

Proposition 3.23. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à $]-\infty, a[\cap D$ et à $]a, +\infty[\cap D$.*

1. *Si $a \in D$ alors :*
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell \text{ et } f(a) = \ell.$$

2. *Si $a \notin D$ alors :*
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell.$$

Démonstration. Démontrons la proposition pour $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in D$.
$\Rightarrow$: soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

[19] Dans la plupart des pays, on utilise une définition épointée de la limite de sorte que la limite de f en a étudie le comportement de $f(x)$ lorsque x est proche de a *mais différent de* a.
Formellement, il faut remplacer *point adhérent* par *point d'accumulation* et $|x-a| \leq \eta$ par $0 < |x-a| \leq \eta$.
Dans les concours en France, la définition utilisée est non-épointée, c'est-à-dire celle présentée au début de ce chapitre.

Soit $x \in D$ tel que $0 < a - x \leq \eta$. Alors $|x-a| = a - x \leq \eta$, donc $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
Soit $x \in D$ tel que $0 < x - a \leq \eta$. Alors $|x-a| = x - a \leq \eta$, donc $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, 0 < a - x \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

et que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, 0 < x - a \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in D, 0 < a - x \leq \eta_1 \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in D, 0 < x - a \leq \eta_2 \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Posons $\eta \coloneqq \min(\eta_1, \eta_2)$. Soit $x \in D$ tel que $|x - a| \leq \eta$.

- Premier cas : $x < a$ alors $0 < a - x = |x - a| \leq \eta \leq \eta_1$ donc $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
- Deuxième cas : $x > a$ alors $0 < x - a = |x - a| \leq \eta \leq \eta_2$ donc $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
- Troisième cas : $x = a$ alors $|f(x) - \ell| = |f(a) - f(a)| = 0 \leq \varepsilon$.

On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

■

Exemple 3.24. Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
Alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x + 1 = 1$.
Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas.

Exemple 3.25. Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
Alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^x = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x + 1 = 1$ et $f(0) = 1$.
Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

3.6 Opérations sur les limites

$\lim(f+g)$			
$\lim g$ \ $\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\tilde{\ell}$	$\ell + \tilde{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

$\lim(f-g)$			
$\lim g$ \ $\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\tilde{\ell}$	$\ell - \tilde{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI

$\lim(fg)$					
$\lim f$ \ $\lim g$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\tilde{\ell} > 0$	$\ell\tilde{\ell}$	$\ell\tilde{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\tilde{\ell} < 0$	$\ell\tilde{\ell}$	$\ell\tilde{\ell}$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

$\lim(f/g)$					
$\lim f$ \ $\lim g$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\tilde{\ell} > 0$	$\ell/\tilde{\ell}$	$\ell/\tilde{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\tilde{\ell} < 0$	$\ell/\tilde{\ell}$	$\ell/\tilde{\ell}$	0	$-\infty$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0^+	0^-	0	FI	FI
$-\infty$	0^-	0^+	0	FI	FI

Démontrons que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \tilde{\ell}$ *alors* $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \ell + \tilde{\ell}$*.*
Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_1 \implies |f(x)-\ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_2 \implies |g(x)-\tilde{\ell}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $\eta \coloneqq \min(\eta_1,\eta_2) > 0$. Soit $x \in D$ tel que $|x-a| \leq \eta$. Alors

$$|(f(x)+g(x)) - (\ell+\tilde{\ell})| = |(f(x)-\ell) + (g(x)-\tilde{\ell})| \leq |f(x)-\ell| + |g(x)-\tilde{\ell}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta \implies |(f(x)+g(x)) - (\ell+\tilde{\ell})| \leq \varepsilon.$$

■

Démontrons que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \tilde{\ell}$ *alors* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)g(x) = \ell\tilde{\ell}$*.*
Il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_1 \implies |f(x)-\ell| \leq \frac{\varepsilon}{2(|\tilde{\ell}|+1)}$.
De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_2 \implies |g(x)-\tilde{\ell}| \leq \frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)}$.
Enfin, il existe $\eta_3 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_3 \implies |g(x)-\tilde{\ell}| \leq 1$.
Posons $\eta \coloneqq \min(\eta_1,\eta_2,\eta_3) > 0$. Soit $x \in D$ tel que $|x-a| \leq \eta$. Alors

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - \ell\tilde{\ell}| &= |f(x)g(x) - \ell g(x) + \ell g(x) - \ell\tilde{\ell}| \\
&\leq |f(x)g(x) - \ell g(x)| + |\ell g(x) - \ell\tilde{\ell}| \\
&= |f(x)-\ell||g(x)| + |\ell||g(x)-\tilde{\ell}| \\
&= |f(x)-\ell||g(x)-\tilde{\ell}+\tilde{\ell}| + |\ell||g(x)-\tilde{\ell}| \\
&\leq |f(x)-\ell|\left(|g(x)-\tilde{\ell}| + |\tilde{\ell}|\right) + |\ell||g(x)-\tilde{\ell}| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2(|\tilde{\ell}|+1)}(1+|\tilde{\ell}|) + |\ell|\frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x)g(x) - \ell\tilde{\ell}| \leq \varepsilon.$$

■

Démontrons que si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$ *alors* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$.
Il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\frac{|\ell|^2}{2}$.
De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_2 \implies |f(x) - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2}$.
Remarquons d'abord que si $x \in D$ vérifie $|x-a| \leq \eta_2$ alors

$$|\ell| = |\ell - f(x) + f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |f(x)| \leq \frac{|\ell|}{2} + |f(x)|$$

et ainsi $|f(x)| \geq \frac{|\ell|}{2} > 0$.
Ainsi f ne s'annule pas au voisinage de a et $\frac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a.
Posons $\eta \coloneqq \min(\eta_1, \eta_2) > 0$ et considérons $x \in D$ vérifiant $|x-a| \leq \eta$. Alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{f} - \frac{1}{\ell}\right| &= \left|\frac{\ell - f(x)}{\ell f(x)}\right| \\ &= \frac{1}{|\ell|} \cdot \frac{1}{|f(x)|} \cdot |\ell - f(x)| \\ &\leq \frac{1}{|\ell|} \cdot \frac{2}{|\ell|} \cdot \varepsilon\frac{|\ell|^2}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta \implies \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| \leq \varepsilon.$$

■

Démontrons que si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = \tilde{\ell} \neq 0$ *alors* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\tilde{\ell}}$.
D'après les résultats précédents, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} f(x)\frac{1}{g(x)} = \ell \cdot \frac{1}{\tilde{\ell}} = \frac{\ell}{\tilde{\ell}}.$$

■

Remarque 3.26. Lorsque le tableau contient la mention FI (pour *forme indéterminée*), cela signifie que l'on ne peut pas conclure directement, i.e. que la valeur de la limite dépend des fonctions impliquées et non seulement de leurs limites. Il faut donc étudier la situation plus finement pour en déduire la limite.
Par exemple :

- $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 - x = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x - x^2 = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x} - 1\right) = -\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} x + 42 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x + 42 - x = \lim_{x\to+\infty} 42 = 42$.

3.7 Quelques limites obtenues par croissances comparées

Les limites suivantes se déduisent des Propositions A.35 et A.45.
Soient $a, b > 0$ alors

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^b \mathrm{e}^{ax} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a |\ln(x)|^b = 0$

3.8 Limites et inégalités

Proposition 3.27. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons que $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_a g$ existent (finies ou infinies), alors :*

$$(\forall x \in D,\ f(x) \leq g(x)) \implies \lim_a f \leq \lim_a g.$$

Démonstration. Démontrons le résultat dans le cas de limites finies en un point :
i.e. $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à D, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \tilde{\ell} \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in D,\ f(x) \leq g(x)$.
Supposons par l'absurde que $\ell > \tilde{\ell}$.
Soit $\varepsilon \coloneqq \frac{\ell-\tilde{\ell}}{2} > 0$. Alors, il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_1 \implies |f(x)-\ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_2 \implies |g(x)-\tilde{\ell}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque a est adhérent à D et que $\min(\eta_1, \eta_2) > 0$, il existe $x \in D$ tel que $|x-a| \leq \min(\eta_1, \eta_2)$.
Alors $g(x) - \tilde{\ell} \leq |g(x) - \tilde{\ell}| < \varepsilon$, d'où $g(x) < \tilde{\ell} + \varepsilon$ et $\ell - f(x) \leq |f(x) - \ell| < \varepsilon$ d'où $\ell - \varepsilon < f(x)$.
Ainsi $g(x) < \tilde{\ell} + \varepsilon = \ell - \varepsilon < f(x)$.
D'où une contradiction. ∎

Remarque 3.28. Attention, après passage à la limite, une inégalité stricte peut devenir large.
En effet, $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > -e^x$ mais $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} -e^x$.

Théorème 3.29 (*des gendarmes*)**.** *Soient $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ trois fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}\{\pm\infty\}$.*

$$\begin{cases} \forall x \in D,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_a f = \lim\limits_a h = \ell \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \lim_a g = \ell$$

Démonstration. Nous ne démontrons le résultat que pour une limite en un point ; il se démontre de façon analogue pour une limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_1 \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$.
De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_2 \implies |h(x)-\ell| \leq \varepsilon$.
Posons $\eta \coloneqq \min(\eta_1, \eta_2) > 0$ et considérons $x \in D$ vérifiant $|x-a| \leq \eta$.
Alors, puisque $|f(x)-\ell| \leq \varepsilon$, on a $\ell - \varepsilon \leq f(x)$.
De même, puisque $|h(x)-\ell| \leq \varepsilon$, on a $h(x) \leq \ell + \varepsilon$.
Ainsi $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq \ell + \varepsilon$, et donc $|g(x)-\ell| \leq \varepsilon$.
On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon.$$

∎

Exemple 3.30. On définit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et on souhaite calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
Soit $x > 0$, alors $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exemple 3.31. On définit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et on souhaite calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

- Si $x > 0$ alors $-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$, d'après le théorème des gendarmes on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>0}} f(x) = 0$.
- Si $x < 0$ alors $x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$, d'après le théorème des gendarmes on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<0}} f(x) = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

3.9 Fonction bornée et limite nulle

Proposition 3.32. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*
Si $\begin{cases} f \text{ est bornée} \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Démonstration dans le cas où $a \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque f est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |f(x)| \leq M$.
Puisque $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta \implies |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Comme a est adhérent à D, il existe $x \in D$ tel que $|x-a| \leq \eta$. Alors

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x)g(x)| \leq \varepsilon.$$

■

Exemple 3.33. On souhaite (encore) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
On sait que sin est bornée et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)\dfrac{1}{x} = 0$.

3.10 Changement de variable

Proposition 3.34. *Soient $g : D \to \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$, où $D, E \subset \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im}(f) \subset D$. Alors*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = c \end{cases} \implies \lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = c.$$

Démonstration. On montre la proposition lorsque $a, b, c \in \mathbb{R}$; la démonstration est similaire dans les autres cas.
Soit $\varepsilon > 0$.
Alors, il existe $\tilde{\eta} > 0$ tel que $\forall x \in D$, $|x - b| \leq \tilde{\eta} \implies |g(x) - c| \leq \varepsilon$.
Puis, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in E$, $|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - b| \leq \tilde{\eta}$.
Soit $x \in E$ vérifiant $|x - a| \leq \eta$ alors $|f(x) - b| \leq \tilde{\eta}$ et donc $|g(f(x)) - c| \leq \varepsilon$.
On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, |x - a| \leq \eta \implies |g(f(x)) - c| \leq \varepsilon.$$

■

La règle de la composition, que l'on vient de démontrer, est généralement utilisée pour réaliser un changement de variable.

Exemple 3.35. On souhaite calculer $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.
Remarquons que $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = g(f(x))$ où $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(u) = \frac{u-2}{u^2-4}$.
On sait que $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$ et on calcule

$$\lim_{u \to 2} g(u) = \lim_{u \to 2} \frac{u - 2}{u^2 - 4} = \lim_{u \to 2} \frac{u - 2}{(u - 2)(u + 2)} = \lim_{u \to 2} \frac{1}{u + 2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} g \circ f(x) = \dfrac{1}{4}$.

En pratique, on rédige généralement ce raisonnement de la façon suivante :
Posons $u = \sqrt{x}$ alors $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim\limits_{u \to 2} \dfrac{u - 2}{u^2 - 4} = \lim\limits_{u \to 2} \dfrac{u - 2}{(u - 2)(u + 2)} = \lim\limits_{u \to 2} \dfrac{1}{u + 2} = \dfrac{1}{4}$.

3.11 Limites finies et valeur absolue

Proposition 3.36. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$$

Corollaire 3.37. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = 0$.

Exemple 3.38. Le corollaire précédent permet d'éviter d'avoir à considérer le signe de x dans l'Exemple 3.31. En effet, on aurait pu rédiger :

$$0 \leq \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \left| x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \right| = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Remarque 3.39. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$.
Mais il n'y a pas de réciproque.
Prenons par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} -42 & \text{si } x \leq 0 \\ 42 & \text{sinon} \end{cases}$.
Alors $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 42$ mais $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas.

3.12 Théorème de la limite monotone

Théorème 3.40. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction croissante où $D \subset \mathbb{R}$.*

- *Si $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à $D\cap]-\infty, a[$ alors*
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \sup f(D\cap]-\infty, a[).$$
- *Si $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à $D\cap]a, +\infty[$ alors*
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \inf f(D\cap]a, +\infty[).$$
- *Si $a = +\infty$ et D n'est pas majorée alors*
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup f(D).$$
- *Si $a = -\infty$ et D n'est pas minorée alors*
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf f(D).$$

On rappelle que, par convention, on note $\sup A = +\infty$ si A est une partie de $\mathbb{R}$ non-majorée et $\inf A = -\infty$ si A est une partie de $\mathbb{R}$ non-minorée.

Démonstration. On montre seulement le cas où $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à $D\cap]-\infty, a[$; les autres cas se démontrent de façon similaire.
Posons $E \coloneqq f(D\cap]-\infty, a[)$.

- Premier cas : E n'est pas majoré.
Soit $N \in \mathbb{R}$. Comme E n'est pas majoré, il existe $x_0 \in D\cap]-\infty, a[$ tel que $f(x_0) \geq N$.
Posons $\eta \coloneqq a - x_0 > 0$.
Soit $x \in D$ tel que $0 < a - x \leq \eta$ alors $x \geq a - \eta = x_0$. Donc $f(x) \geq f(x_0) \geq N$.
On a bien montré que
$$\forall N \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D, 0 < a - x \leq \eta \implies f(x) \geq N,$$
i.e. $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$.
- Deuxième cas : E est majoré.
Comme a est adhérent à $D\cap]-\infty, a[$, on a que E est non-vide et majoré.
Donc $M \coloneqq \sup(E)$ existe.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors, par définition de M, il existe $x_0 \in D\cap]-\infty, a[$ tel que $M - \varepsilon \leq f(x_0)$.
Posons $\eta \coloneqq a - x_0 > 0$.
Soit $x \in D$ tel que $0 < a - x \leq \eta$ alors $x \geq a - \eta = x_0$. Donc
$$\begin{aligned} |f(x) - M| &= M - f(x) && \text{car } f(x) \leq M \\ &\leq M - f(x_0) && \text{car } x \geq x_0 \text{ et } f \text{ est croissante.} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$
On a bien montré que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, 0 < a - x \leq \eta \implies |f(x) - M| \leq \varepsilon,$$
i.e. $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = M$.

■

Théorème 3.41. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante où $D \subset \mathbb{R}$.*

- *Si $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à $D \cap]-\infty, a[$ alors*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \inf f(D \cap]-\infty, a[).$$

- *Si $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à $D \cap]a, +\infty[$ alors*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \sup f(D \cap]a, +\infty[).$$

- *Si $a = +\infty$ et D n'est pas majorée alors*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf f(D).$$

- *Si $a = -\infty$ et D n'est pas minorée alors*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sup f(D).$$

Démonstration. On se ramène au cas croissant en considérant $-f$. ∎

3.13 Exercices

Exercice 1. Est-ce que $\sqrt{2}$ est adhérent à $\mathbb{Q}$?

Exercice 2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et majorée. Montrer que $\sup(A)$ est adhérent à A.

Exercice 3. Déterminer si 0 est adhérent aux parties suivantes de $\mathbb{R}$:

1. $\{0\}$
2. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4. $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$
5. $\left\{ \frac{1}{2} + n \ : \ n \in \mathbb{Z} \right\}$
6. $[17, 42]$
7. $[-1, 1]$
8. $[-1, 0]$
9. $[-1, 0[$

Exercice 4. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Écrire à l'aide de quantificateurs "f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$".

Exercice 5.

1. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$.
   Étudier $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ en revenant à la définition.
2. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
   Étudier $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ en revenant à la définition.
3. On définit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
   Étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en revenant à la définition.
4. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
   Étudier $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ en revenant à la définition.

Exercice 6. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. (a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq \ell$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq 0$.
2. Est-ce que f admet une limite en 0 ?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs "f n'est pas majorée".
2. Montrer que si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ alors f n'est pas majorée.

Exercice 8. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$.

Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in D \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\ f(x) > \frac{\ell}{2}$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Écrire avec des quantificateurs "f est périodique".
2. Montrer que f est constante.

Exercice 11. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$
3. $\lim_{x\to+\infty} x^5 e^{-x^2}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x+7}{x^2+4}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$
6. $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}$
7. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$
8. $\lim_{x\to0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)x^2$
9. $\lim_{x\to+\infty} \left(x^7-2x^5+11\right)$
10. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+11}{x+1}$
11. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+\sqrt{2x^6+1}}{2x^3+\sqrt{x^5+1}}$
12. $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2-\sqrt{x^5+1}\right)$
13. $\lim_{x\to-3} \frac{x^2-9}{3-2x-x^2}$
14. $\lim_{x\to1, x>1} \frac{x^2-9}{3-2x-x^2}$
15. $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)$
16. $\lim_{x\to0} \frac{x^2+2|x|}{x}$
17. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$
18. $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$
19. $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
20. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x-\cos\left(\ln x+e^x-42+\sqrt{x}\right)}{x}$

Exercice 12. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to0} \lfloor x\rfloor$
2. $\lim_{x\to0} \lfloor x^2\rfloor$
3. $\lim_{x\to+\infty} \lfloor x\rfloor$
4. $\lim_{x\to0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
5. $\lim_{x\to0} x^2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$

Exercice 13. On admet que $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to2} \frac{\sin x}{x}$
2. $\lim_{x\to0} \frac{\sin(5x)}{x}$
3. $\lim_{x\to0} \frac{\tan^2\left(2x^2\right)}{x^4}$
4. $\lim_{x\to0} \frac{\sin e^x}{e^x}$
5. $\lim_{x\to+\infty} e^x\sin\left(e^{-x}\right)$
6. $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x}$
7. $\lim_{x\to0} \frac{\tan^{10}\left(2x^{20}\right)}{\sin^{200}(3x)}$

4 Continuité

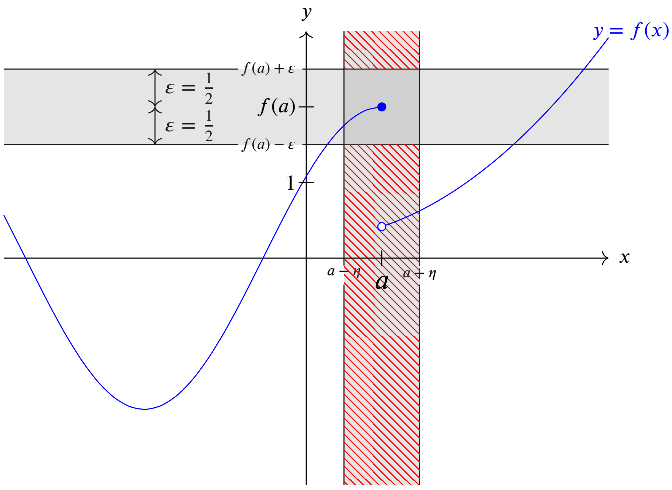
4.1 Définition

Définition 4.1. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in D$.
On dit que f est *continue en a* si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Formellement, cela s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$$

Exemple 4.2. *TODO : Un exemple de fonction par morceaux qui est continue*

Exemple 4.3. La fonction suivante n'est pas continue en a.



En effet, en passant à la négation, f n'est pas continue en a si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D, \ |x - a| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \varepsilon.$$

Si on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ce qui revient à fixer une bande horizontale centrée en $y = f(a)$ de hauteur 1, alors, pour tout $\eta > 0$, il existe un point du graphe dans la bande verticale de largeur 2η centrée en $x = a$ qui se situe en-dehors de la bande horizontale.

Les deux propositions suivantes découlent immédiatement des opérations sur les limites.

Proposition 4.4. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$. Soit $a \in D$.*
(*i*) *Si f et g sont continues en a alors $f + g$ est continue en a.*
(*ii*) *Si f et g sont continues en a alors fg est continue en a.*
(*iii*) *Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.*

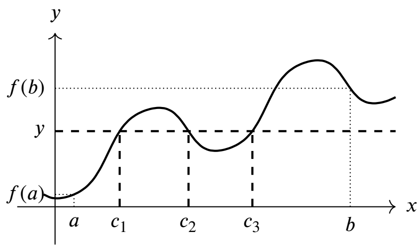
Proposition 4.5. *Soient $g : D \to \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$, où $D, E \subset \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im}(f) \subset D$.*
Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Définition 4.6. On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$, est continue si elle est continue en chaque point de D.

4.2 Continuité sur un intervalle

Théorème 4.7 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle et $a, b \in I$ tels que $f(a) \leq f(b)$. Alors*

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \exists c \in I, \ f(c) = y.$$



Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a < b$.
L'ensemble $E \coloneqq \{x \in [a,b] \;:\; f(x) \leq y\}$ est non-vide (car $a \in E$) et majoré (par b), donc $c \coloneqq \sup(E)$ est bien défini et on vérifie aisément[20] que $c \in [a,b] \subset I$.

Supposons par l'absurde que $f(c) < y$. Alors $\varepsilon \coloneqq y - f(c) > 0$.
Puisque f est continue en c, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I,\ |x - c| \leq \eta \implies |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon = y - f(c).$$

Posons $\delta \coloneqq \min(\eta, b - c)$. On a $\delta > 0$ puisque si $b = c$ alors $f(b) = f(c) < y \leq f(b)$.
Posons $d \coloneqq c + \delta$ alors $c < d \leq b$ et $|d - c| = \delta \leq \eta$. Donc $|f(d) - f(c)| \leq y - f(c)$, et en particulier $f(d) \leq y$. Ainsi $d \in E$.
Donc $c < d \leq \sup(E) = c$. D'où une contradiction.
Ainsi $y \leq f(c)$.

On montre de la même façon que $y \geq f(c)$.
Donc $y = f(c)$. ∎

Remarque 4.8. Le théorème des valeurs intermédiaires énonce que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque 4.9. Il existe des fonctions non-continues vérifiant la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires. Prenons par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors f n'est pas continue en 0 mais pour tout $a, b \in I$ tels que $f(a) \leq f(b)$ et pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = y$.

Théorème 4.10 (Théorème de Weierstrass)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment non-vide (i.e. $a \leq b$). Alors il existe $c, d \in [a,b]$ tels que*

$$\forall x \in [a,b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Démontrons d'abord le résultat intermédiaire suivant :

Lemme 4.11. *Une fonction continue sur un segment est bornée.*

Démonstration. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue où $a \leq b$ (l'énoncé est évident si le domaine est vide).
Posons $E \coloneqq \{c \in [a,b] \;:\; f \text{ est bornée sur } [a,c]\}$, alors E est non-vide (puisque $a \in E$) et majorée (par b).

[20] On sait que $a \in E$ et que c est un majorant de E, donc $a \leq c$. On sait aussi que b est un majorant de E et que c est le plus petit des majorants de E, donc $c \leq b$.

Ainsi $M \coloneqq \sup(E)$ est bien défini et on vérifie aisément que $[a, M[\subset E \subset [a, M] \subset [a, b]$.
Puisque f est continue en M, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b],\ |x - M| \leq \eta \implies |f(x) - f(M)| \leq 1.$$

Montrons dans un premier temps que $E = [a, M]$.
Soit $x \in [\max(a, M - \eta), M]$ alors $|x - M| \leq \eta$ et donc $f(M) - 1 \leq f(x) \leq f(M) + 1$.
Ainsi f est bornée sur $[\max(a, M - \eta), M]$.
Puisque f est aussi bornée sur $[a, \max(a, M - \eta)]$, on a bien montré que f est bornée $[a, M]$.

Montrons maintenant que $M = b$ en supposant par l'absurde que $M < b$.
Posons $\delta \coloneqq \min(\eta, b - M) > 0$.
Soit $x \in [M, M + \delta]$ alors $|x - M| = x - M \leq \delta \leq \eta$ et $x \in [a, b]$.
Donc $f(M) - 1 \leq f(x) \leq f(M) + 1$.
Ainsi f est bornée sur $[A, M]$ et sur $[M, M + \delta]$ et donc sur $[A, M + \delta]$.
Donc $M + \delta \leq \sup(E) = M$, d'où une contradiction. ■

Remarque 4.12. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, le lemme énonce qu'une fonction continue envoie un segment, i.e. un intervalle fermé et borné, sur un intervalle borné.
L'hypothèse "fermé" est importante, il est en général faux qu'une fonction continue envoie un intervalle borné sur un intervalle borné.
Par exemple, l'image de $]0, 2[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est $]1/2, +\infty[$.

Démonstration du théorème de Weierstrass.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment où $a \leq b$.
D'après le lemme précédent, $E \coloneqq \{f(x) : x \in [a, b]\}$ est majoré. De plus E est clairement non-vide. Donc $M \coloneqq \sup(E)$ est bien défini.

Supposons par l'absurde que $M \notin E$.
Alors $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ est bien définie et continue sur $[a, b]$.
Soit $A > 0$.
Par définition de la borne supérieure, il existe $x \in [a, b]$ tel que $M - \frac{1}{A} < f(x)$, i.e. $g(x) > A$.
Ainsi g est une fonction continue sur un segment qui n'est pas majorée, d'où une contradiction avec le lemme précédent.

Donc $M \in E$ et il existe alors $d \in [a, b]$ tel que $f(d) = M$. Ainsi, $\forall x \in [a, b],\ f(x) \leq f(d)$.
En considérant $-f$, on obtient qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\forall x \in [a, b],\ f(c) \leq f(x)$. ■

Remarque 4.13. Le théorème de Weierstrass énonce qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Combiné avec le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
Attention, cela ne signifie pas que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ ou $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.
Par exemple, $\sin([0, \pi]) = [0, 1]$ mais $[\sin(0), \sin(\pi)] = \{0\}$.
Le théorème de Weierstrass énonce seulement que si f est continue sur $[a, b]$ alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq \beta$ et $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$.

4.3 Théorème de la bijection

Théorème 4.14 (Théorème de la bijection, version continue)**.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On définit $\tilde{f} : I \to f(I)$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$.
Si f est continue et strictement monotone alors :

1. *$f(I)$ est un intervalle,*
2. *$\tilde{f}$ est bijective,*
3. *$\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que f,*
4. *$\tilde{f}^{-1}$ est continue sur $f(I)$.*

Démonstration. Quitte à appliquer raisonnement à $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante.

1. C'est une conséquence immédiate du théorème des valeurs intermédiaires.

2. On sait déjà que $\tilde{f}$ est surjective.
   Supposons par l'absurde que $\tilde{f}$ ne soit pas injective alors il existe $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$. Ce qui contredit la stricte monotonie de f.
   Donc $\tilde{f}$ est bijective.

3. Soient $y_1, y_2 \in f(I)$ tels que $y_1 < y_2$.
   Supposons par l'absurde que $\tilde{f}^{-1}(y_1) \geq \tilde{f}^{-1}(y_2)$.
   Alors, par monotonie de f, $y_1 = f\left(\tilde{f}^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(\tilde{f}^{-1}(y_2)\right) = y_2$, d'où une contradiction.
   Ainsi $\tilde{f}^{-1}(y_1) < \tilde{f}^{-1}(y_2)$.
   Donc $\tilde{f}^{-1}$ est strictement croissante.

4. Soient $y_0 \in f(I)$ et $\varepsilon > 0$. Posons $x_0 \coloneqq \tilde{f}^{-1}(y_0)$.
   On suppose dans un premier temps que x_0 n'est pas une extrémité de I. Ainsi il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$.
   Posons $\tilde{\varepsilon} \coloneqq \min(\alpha, \varepsilon)$, alors

   $$\left|\tilde{f}^{-1}(y) - x_0\right| \leq \tilde{\varepsilon} \Leftrightarrow \tilde{f}(x_0 - \tilde{\varepsilon}) \leq y \leq \tilde{f}(x_0 + \tilde{\varepsilon}).$$

   Puisque $x_0 - \tilde{\varepsilon} < x_0$, par monotonie de f, on obtient que $\eta_1 \coloneqq \tilde{f}(x_0) - \tilde{f}(x_0 - \tilde{\varepsilon}) > 0$.
   De même, $\eta_2 \coloneqq \tilde{f}(x_0 + \tilde{\varepsilon}) - \tilde{f}(x_0) > 0$.
   Posons $\eta \coloneqq \min(\eta_1, \eta_2) > 0$.
   Soit $y \in f(I)$ tel que $|y - y_0| \leq \eta$, alors

   $$\tilde{f}(x_0 - \tilde{\varepsilon}) = y_0 - \eta_1 \leq y_0 - \eta \leq y \leq y_0 + \eta \leq y_0 + \eta_2 = \tilde{f}(x_0 + \tilde{\varepsilon}).$$

   Par monotonie de $\tilde{f}^{-1}$, il vient $x_0 - \tilde{\varepsilon} \leq \tilde{f}^{-1}(y) \leq x_0 + \tilde{\varepsilon}$ et donc $\left|\tilde{f}^{-1}(y) - \tilde{f}^{-1}(y_0)\right| \leq \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$.
   On a bien montré que

   $$\forall y_0 \in f(I), \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |y - y_0| \implies \left|\tilde{f}^{-1}(y) - \tilde{f}^{-1}(y_0)\right| \leq \varepsilon.$$

   Lorsque x_0 est une extrémité de I, on peut adapter le raisonnement précédent en ne considérant qu'un seul des deux réels η_1 et η_2. ■

Remarque 4.15. Puisque $y = \tilde{f}(x) \Leftrightarrow x = \tilde{f}^{-1}(y)$, le graphe de $\tilde{f}^{-1}$ s'obtient en faisant la symétrie du graphe de $\tilde{f}$ par rapport à la première bissectrice $y = x$.

***TODO :** Exemple+dessin*

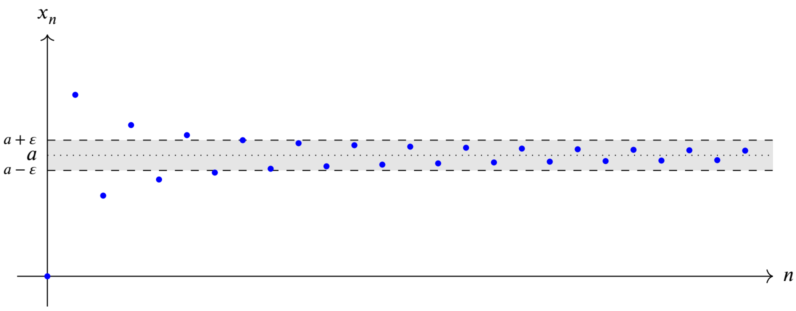
4.4 Caractérisation séquentielle de la continuité

***TODO :** Déplacer dans le chapitre sur les suites quand il sera rédigé*

On rappelle qu'une suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ tend vers $a \in \mathbb{R}$, noté $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \geq N \implies |x_n - a| \leq \varepsilon.$$

Cela signifie qu'étant donné n'importe quel $\varepsilon > 0$ (aussi petit soit-il), il existe un rang à partir duquel les termes de la suite (x_n) se situent tous dans la bande horizontale infinie de hauteur 2ε centrée en $y = a$.



Exemple 4.16. Montrons que pour tout $a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

- Premier cas : $a > 1$. Soit $\varepsilon > 0$.
  Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\varepsilon \geq a - 1$.
  Soit $n \geq n_0$, alors, d'après l'inégalité de Bernoulli (cf Exemple 1.86), on a
  $$a = \left(1 + a^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n \geq 1 + n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$
  d'où
  $$\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a-1}{n} \leq \frac{a-1}{n_0} \leq \varepsilon.$$
- Deuxième cas : $a = 1$. Alors $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a^{\frac{1}{n}} = 1$.
- Troisième cas : $a < 1$. Alors, d'après le premier cas,
  $$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1/a)^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Proposition 4.17. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle et $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ tendant vers a, la suite $f(x_n)$ tend vers $f(a)$.*

Démonstration. Supposons que f soit continue en a et que $(x_n)_{n\geq n_0}$ tende vers a.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par continuité de f en a, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.
Comme $(x_n)_n$ tend vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0$, $n \geq N \implies |x_n - a| \leq \eta$.
Donc pour $n \geq N$, on a $|f(x_n) - f(a)| \leq \varepsilon$.
On a donc bien montré que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \geq N \implies |f(x_n) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Montrons désormais la réciproque par contraposée.
Supposons que f ne soit pas continue en a. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe $x_n \in I$ vérifiant $|x_n - a| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$.
On a donc bien construit une suite (x_n) qui tend vers a mais tel que $f(x_n)$ ne tende pas vers $f(a)$. ■

***TODO :** Utile pour montrer qu'une fonction n'est pas continue ; exemple !*

4.5 Exercices

TODO

5 Dérivabilité

5.1 Définition et premières propriétés

Définition 5.1. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ et a un point non-isolé[21] de D. On dit que f est *dérivable en a* si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Elle est alors notée $f'(a)$.

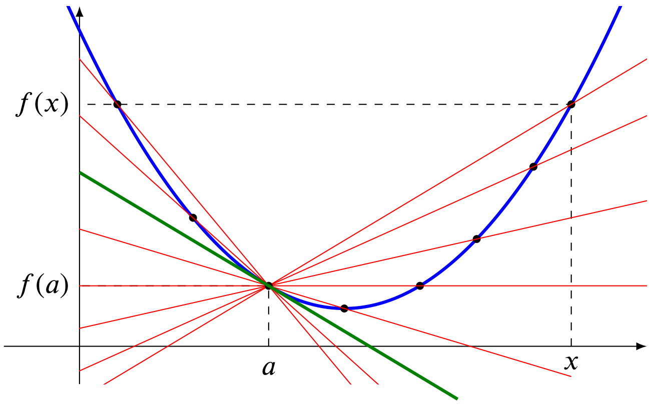
La fonction définie par $D \setminus \{a\} \ni x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$ s'appelle le *taux d'accroissement de f en a*. La dérivée de f en a est donc la limite du taux d'accroissement lorsque x tend vers a.

Puisque la sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

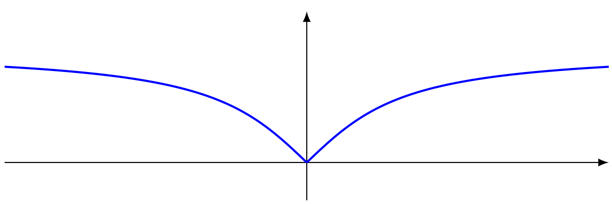
f est dérivable en a si et seulement si les sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ tendent vers une droite non-verticale T_a lorsque x tend vers a. On appelle alors cette droite la *tangente* de f en a. Si elle existe, la tangente de f en a passe par $(a, f(a))$ et est de pente $f'(a)$; ainsi elle admet pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



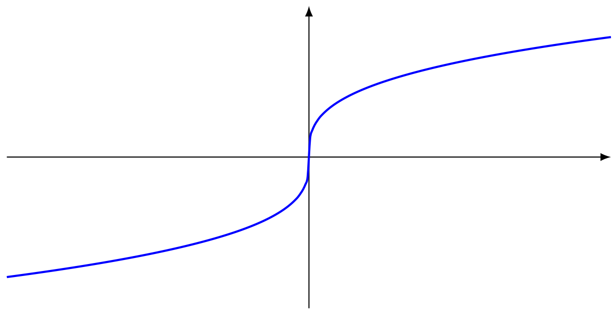
Géométriquement, f n'est pas dérivable en a :

- si les sécantes ne tendent pas vers une droite (par exemple, si elles tendent vers deux droites différentes à droite et à gauche en présence d'un *pic* sur le graphe de f en a) ;



[21]Cela signifie que $a \in D$ et que a est adhérent à $D \setminus \{a\}$;
autrement dit que $a \in D$ et que $\forall \varepsilon > 0,\ ([a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap D) \setminus \{a\} \neq \varnothing$.

- ou si les sécantes tendent vers une droite verticale (i.e. une tangente de pente infinie).



Remarque 5.2. On vérifie aisément par un changement de variable que la limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie si et seulement si la limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas, on a de plus

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Proposition 5.3. *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

Démonstration. Supposons que f soit dérivable en a. Alors

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\xrightarrow[x\to a]{} f(a)+0\cdot f'(a)=f(a).$$

Donc f est continue en a. ■

Remarque 5.4. La réciproque du résultat précédent est fausse.
Prenons par exemple $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=|x|$ alors f est continue en 0 mais f n'est pas dérivable en 0.
En effet, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}|x|=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}-x=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}|x|=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x=0$, et $|0|=0$; d'où la continuité de f en 0.
Mais $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}-1=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}1=1$. Donc f n'est pas dérivable en 0.

Définition 5.5. On dit que f est dérivable sur D si f est dérivable en chaque point de D. Dans ce cas, la fonction $f':D\to\mathbb{R}$ définie par $x\mapsto f'(x)$ est appelée *dérivée de f sur D*.

Proposition 5.6.

(i) *La fonction constante $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x)=0$.*

(ii) *La fonction identité $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x)=1$.*

(iii) *La fonction $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\x&\mapsto&x^n\end{array}$, où $n\in\mathbb{N}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x)=nx^{n-1}$.*

(iv) *La fonction $f:\begin{array}{ccc}[0,+\infty[&\to&\mathbb{R}\\x&\mapsto&\sqrt{x}\end{array}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ mais n'est pas dérivable en 0.*

(v) *La fonction inverse $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\setminus\{0\}&\to&\mathbb{R}\\x&\mapsto&\frac{1}{x}\end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ de dérivée $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.*

Démonstration.

(i) Soit $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

(ii) Soit $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

(iii) Soit $a \in \mathbb{R}$, si $n=0$ ou $n=1$, c'est exactement les points précédents sinon si $n \geq 2$ alors

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k h^{n-k} - a^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} a^k h^{n-k} + na^{n-1}h + a^n - a^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} a^k h^{n-k-1} + na^{n-1} \\
&= na^{n-1}
\end{aligned}$$

(iv) Soit $a > 0$, alors

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Remarquons que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 puisque :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

(v) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

■

Proposition 5.7. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$, alors :*

(i) *$f + g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,*

(ii) *λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$,*

(iii) *fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,*

(iv) *si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$,*

(v) *si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.*

Démonstration.
Montrons (i) et (ii) :

$$\lim_{x\to a} \frac{(\lambda f(x) + g(x)) - (\lambda f(a) + g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\lambda \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = \lambda f'(a) + g'(a).$$

Montrons (iii) :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Montrons (iv) :

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} -\frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

Pour montrer (v), il suffit de remarquer $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ et d'utiliser les deux derniers points.

■

Proposition 5.8. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $D, E \subset \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im}(f) \subset E$. Si f est dérivable en $a \in D$ et si g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Démonstration. Posons

$$\varepsilon_1(h) = \begin{cases} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$ et $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h)$.
Posons

$$\varepsilon_2(h) = \begin{cases} \frac{g(f(a)+h)-g(f(a))}{h} - g'(f(a)) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $\lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$ et $g(f(a)+h) = g(f(a)) + hg'(f(a)) + h\varepsilon_2(h)$.
Ainsi

$$\begin{aligned}(g\circ f)(a+h) &= g(f(a+h)) = g(f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h)) \\ &= g(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon_1(h))g'(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon_1(h))\varepsilon_2(hf'(a) + h\varepsilon_1(h)).\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a)}{h} = (f'(a) + \varepsilon_1(h))g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon_1(h))\varepsilon_2(hf'(a) + h\varepsilon_1(h)).$$

En passant à la limite, on obtient

$$\lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a)}{h} = f'(a)g'(f(a)).$$

■

5.2 Version dérivable du théorème de la bijection

Le théorème de la bijection, voir Théorème 4.14, énonce qu'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle admet une réciproque sur son image. Si la fonction est de plus dérivable de dérivée non-nulle, alors cette réciproque est aussi dérivable.

Théorème 5.9 (Théorème de la bijection, version dérivable)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On définit $\tilde{f} : I \to f(I)$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$.*
Si f est continue et strictement monotone alors :

1. *$f(I)$ est un intervalle,*
2. *$\tilde{f}$ est bijective,*
3. *$\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que f,*
4. *$\tilde{f}^{-1}$ est continue sur $f(I)$,*
5. *Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$ alors $\tilde{f}^{-1}$ est dérivable en $f(a)$ et*

$$\left(\tilde{f}^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. On notera abusivement f^{-1} pour $\tilde{f}^{-1}$. Alors

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)}.$$

On obtient par continuité que $\lim\limits_{y \to f(a)} f^{-1}(y) = f^{-1}(f(a)) = a$, d'où, par changement de variable,

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{u \to a} \frac{u - a}{f(u) - f(a)} = \lim_{u \to a} \frac{1}{\frac{f(u)-f(a)}{u-a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

■

5.3 Extrema

TODO : *et puis simplifier la démonstration de Rolle*

5.4 Théorème des accroissements finis et conséquences

5.4.1 Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 5.10 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

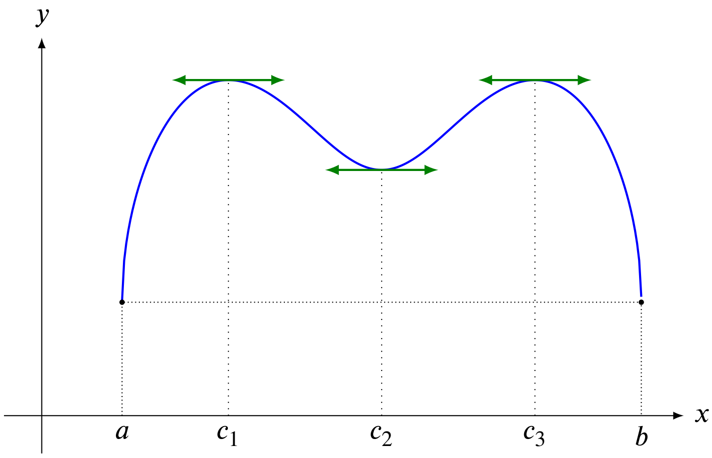
Démonstration. D'après le théorème de Weierstrass (cf 4.10), f est bornée et atteint ses bornes. Notons m (resp. M) le plus petit (resp. grand) élément de $f([a, b])$.

- Si $m = M$ alors f est constante et $f' = 0$.
- Si $m < M$ alors on ne peut pas avoir en même temps $f(a) = m$ et $f(a) = M$.
  Supposons pour fixer les idées que $f(a) = f(b) \neq M$.
  Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$ puisque M est atteint par f.
  Soit h tel que $c + h \in [a, b]$ alors $f(c + h) \leq M = f(c)$, i.e. $f(c + h) - f(a) \leq 0$. Ainsi

$$f'(c) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad f'(c) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

  Donc $f'(c) = 0$. ■

Le théorème de Rolle énonce que si une fonction dérivable sur un intervalle prend la même valeur en deux points distincts alors il existe au moins un point où sa tangente est horizontale.



Le théorème de Rolle est un cas particulier du théorème suivant où l'hypothèse $f(a) = f(b)$ n'est pas nécessaire.

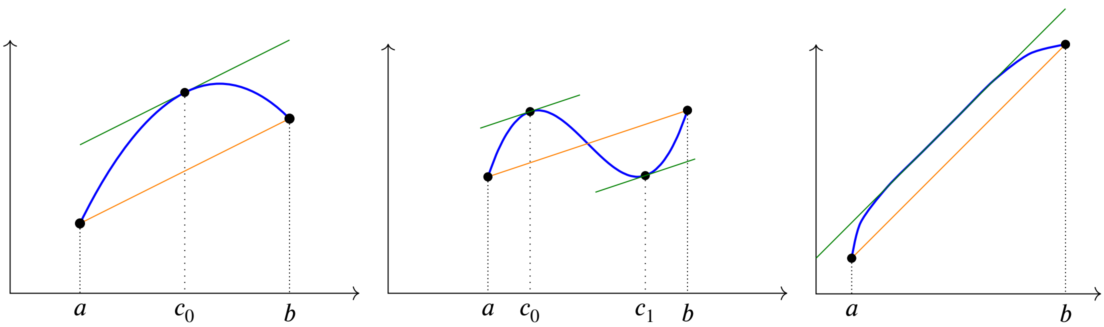
Théorème 5.11 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$.*
Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Démonstration.
Définissons $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ alors φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b)$.
Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, i.e.

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

■

- *Interprétation physique.* Le théorème des accroissements finis énonce qu'il existe un moment où la vitesse instantanée coïncide avec la vitesse moyenne.
- *Interprétation géométrique.* Le théorème des accroissements finis énonce qu'il existe un point $c \in]a, b[$ tel que la tangente en c est parallèle à la sécante entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ puisque ces droites ont alors même pente $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Corollaire 5.12 (Théorème des accroissements finis généralisé)**.**
Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$.
Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Démonstration. On définit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)).$$

Alors φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.
Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, i.e.

$$f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0.$$

■

5.4.2 Application à l'étude des variations d'une fonction dérivable sur un intervalle

Proposition 5.13. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$, alors*

(i) $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ *est constante sur I*

(ii) $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ *est croissante sur I*

(iii) $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ *est strictement croissante sur I*

(iv) $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ *est décroissante sur I*

(v) $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ *est strictement décroissante sur I*

Démonstration.
Motrons (i). Si f est constante alors on a déjà montré que $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
Montrons la réciproque. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$ alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) = 0$ donc $f(b) = f(a)$.

Montrons (ii). Supposons que f soit croissante. Si $a \in \mathring{I}$ alors $f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$.
Réciproquement, supposons que $f' \geq 0$. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \geq 0$. Donc $f(b) \geq f(a)$.

Les autres points se démontrent de la même façon. ■

Remarque 5.14. La réciproque des points (iii) et (v) est fausse.
En effet, si on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(0) = 0$.

Remarque 5.15. L'hypothèse que le domaine est un intervalle est primordiale, comme on peut le constater avec $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

5.5 Exercices

TODO TODO : *Théorème de Darboux*

6 Convexité

TODO

7 Suites et séries numériques

TODO : *démontrer Bolzano–Weierstrass et rajouter nested intervals* ***TODO :*** *déplacer la caractérisation séquentielle de la continuité ici* ***TODO :*** *ne pas oublier transformation d'Abel !*

8 Continuité uniforme

8.1 Définition et lien avec la continuité

Définition 8.1. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$.
On dit que f est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x_1, x_2 \in D,\ \left|x_1 - x_2\right| < \eta \implies \left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \varepsilon$$

Remarque 8.2. La définition de la continuité uniforme ressemble à celle de la continuité. Comparons attentivement ces deux définitions.
On dit que f est continue si

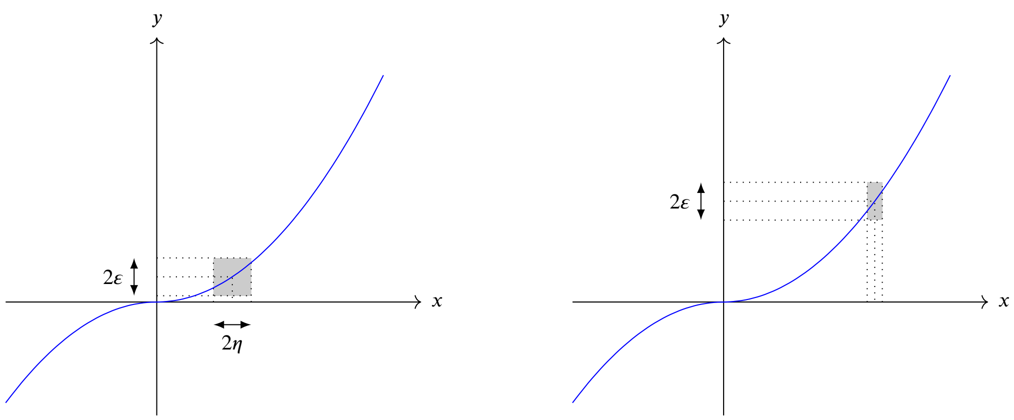
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x_1 \in D,\ \exists \eta > 0,\ \forall x_2 \in D,\ \left|x_1 - x_2\right| < \eta \implies \left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \varepsilon.$$

On dit que f est uniformément continue si

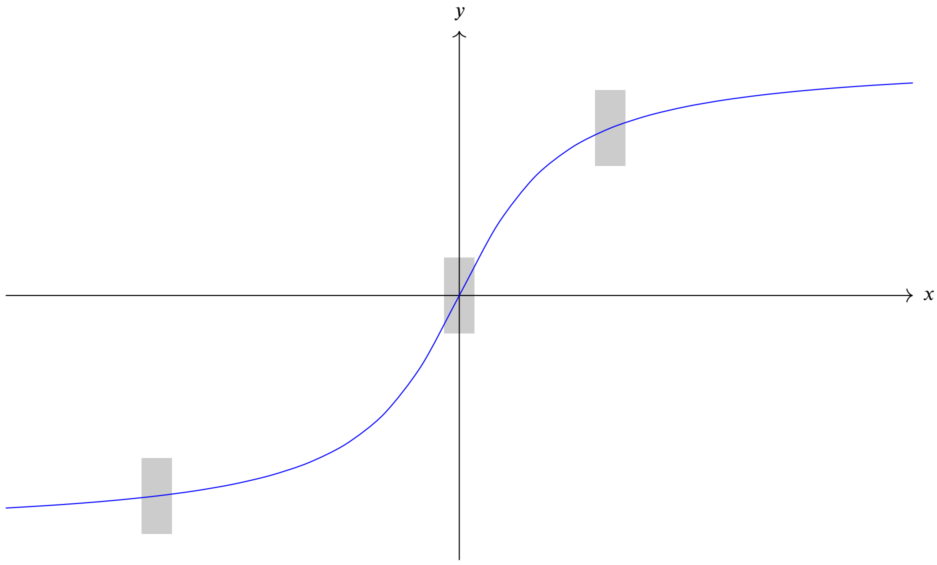
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ \left|x_1 - x_2\right| < \eta \implies \left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \varepsilon.$$

La seule différence est que le quantificateur universel sur x_1 et le quantificateur universel sur η sont permutés. Ainsi η peut déprendre de x_1 pour la continuité alors que pour la continuité uniforme il est nécessaire de trouver un η convenant pour tous les x_1 du domaine, c'est-à-dire que le choix de η doit être indépendant de celui de x_1.
Le terme *uniforme* signifie que η ne dépend que de ε et est indépendant de x_1 ; on peut utiliser le même η pour tous les x_1.
En particulier, la continuité est une notion *locale* (i.e. qui dépend du comportement de la fonction au voisinage du point considéré) alors que la continuité uniforme est une notion *globale* (i.e. qui dépend du comportement de la fonction sur tout son domaine).

Exemple 8.3 (Interprétation graphique)**.**
La fonction suivante est continue mais n'est pas uniformément continue.
Étant donné $\varepsilon > 0$, on remarque que plus on regarde à droite, plus il est nécessaire de choisir un η petit afin que le graphe ne quitte pas le rectangle obtenu par le haut ou par le bas. Ainsi, on ne peut pas choisir η uniformément sur le domaine, c'est-à-dire indépendamment de x_1.



Exemple 8.4 (Interprétation graphique)**.**
La fonction suivante est uniformément continue. En effet, lorsque l'on fixe $\varepsilon > 0$ (i.e. la hauteur du rectangle), aussi petit soit-il, on peut toujours trouver $\eta > 0$ (i.e. la largeur du rectangle) de sorte qu'en centrant le rectangle n'importe où sur le graphe alors ce dernier ne quitte jamais le rectangle par le bas ou par le haut.



La proposition suivante se déduit aisément de la remarque ci-dessus.

Proposition 8.5. *Une fonction uniformément continue est continue.*

La réciproque de cette proposition est fausse, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 8.6. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est continue mais pas uniformément continue.

Néanmoins, le théorème suivant nous assure que la continuité et la continuité uniforme coïncident pour une fonction définie sur un segment.

Théorème 8.7 (Théorème de Heine)**.** *Si une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie sur un segment est continue, alors elle est uniformément continue.*

Montrons d'abord le lemme suivant qui stipule que de tout recouvrement d'un segment par des intervalles ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement par un nombre fini d'intervalles. Ce résultat permet de simplifier la démonstration du théorème de Heine, ainsi que d'autres démonstrations (notamment les démonstrations du Lemme 9.30 et du Théorème 9.33 dans le chapitre sur l'intégration).

Lemme 8.8 (Propriété de Borel–Lebesgue[22])**.**
Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'intervalles ouverts telle que $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ où $a \leq b$.
Alors il existe une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ telle que $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} I_\lambda$

Démonstration. Considérons l'ensemble A des $x \in [a, b]$ tels que $[a, x]$ admet un sous-recouvrement fini, i.e.

$$A := \left\{ x \in [a, b] \ : \ \exists \Lambda' \subset \Lambda \text{ finie telle que } [a, x] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} I_\lambda \right\}.$$

Alors $a \in A$ et donc $A \neq \varnothing$. En effet, puisque $a \in [a, b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, il existe $\tilde{\lambda} \in \Lambda$ tel que $a \in I_{\tilde{\lambda}}$ et alors $[a, a] = \{a\} \subset I_{\tilde{\lambda}}$.
De plus, A est majoré par b. Donc A admet une borne supérieure $S := \sup(A)$. Supposons par l'absurde que $S < b$. Alors, puisque $S \in [a, b]$, il existe $\tilde{\lambda} \in \Lambda$ tel que $S \in I_{\tilde{\lambda}}$. Puisque $I_{\tilde{\lambda}}$

[22] On dit qu'un segment est *compact*, notion que vous étudierez en topologie.

est un intervalle ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[S-\varepsilon, S+\varepsilon] \subset I_{\tilde{\lambda}}$.
Par définition de la borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $S - \varepsilon < x$. Donc, par définition de A, il existe une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ telle que $[a,x] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} I_\lambda$.
Posons $b' \coloneqq \min(S+\varepsilon, b)$ alors $b' \in [a,b]$ et

$$[a,b'] = [a,x] \cup [x,b'] \subset [a,x] \cup [S-\varepsilon, S+\varepsilon] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda'\cup\{\tilde{\lambda}\}} I_\lambda.$$

Donc $b' \in A$, d'où une contradiction puisque $b' > S = \sup(A)$. Donc $\sup(A) = b$.
Il reste à montrer que $b \in A$: pour cela, on peut raisonner comme ci-dessus.
Puisque $b \in [a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, il existe $\tilde{\lambda} \in \Lambda$ tel que $b \in I_{\tilde{\lambda}}$.
Comme $I_{\tilde{\lambda}}$ est un intervalle ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[b-\varepsilon, b+\varepsilon] \subset I_{\tilde{\lambda}}$.
Puisque $b - \varepsilon < b = \sup(A)$, il existe $x \in A$ tel que $S - \varepsilon < x$. Par définition de A, il existe une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ telle que $[a,x] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} I_\lambda$. Ainsi $[a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda'\cup\{\tilde{\lambda}\}} I_\lambda$. ■

Démonstration du théorème de Heine 8.7 en utilisant la propriété de Borel–Lebesgue.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $\lambda \in [a,b]$, puisque f est continue en λ, il existe $\eta_\lambda > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b],\ |x-\lambda| \leq \eta_\lambda \implies |f(x) - f(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $[a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in[a,b]} \left]\lambda - \frac{\eta_\lambda}{2}, \lambda + \frac{\eta_\lambda}{2}\right[$, on déduit de la propriété de Borel–Lebesgue qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [a,b]$ tels que

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left]\lambda_i - \frac{\eta_{\lambda_i}}{2}, \lambda_i + \frac{\eta_{\lambda_i}}{2}\right[. \tag{3}$$

Posons $\eta \coloneqq \frac{1}{2}\min(\eta_{\lambda_1}, \dots, \eta_{\lambda_n})$.
Soient $x_1, x_2 \in [a,b]$ tels que $|x_1 - x_2| \leq \eta$.
D'après (3), il existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $x_1 \in \left]\lambda_i - \frac{\eta_{\lambda_i}}{2}, \lambda_i + \frac{\eta_{\lambda_i}}{2}\right[$.
D'où $|x_1 - \lambda_i| < \frac{\eta_{\lambda_i}}{2} < \eta_{\lambda_i}$ et $|x_2 - \lambda_i| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - \lambda_i| < \eta + \frac{1}{2}\eta_{\lambda_i} \leq \eta_{\lambda_i}$.
Donc $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(\lambda_i)| + |f(x_2) - f(\lambda_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_1, x_2 \in [a,b],\ |x_1 - x_2| \leq \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon,$$

i.e. que f est uniformément continue. ■

On peut aussi démontrer directement le théorème de Heine, sans passer par la propriété de Borel–Lebesgue et en utilisant directement la propriété de la borne supérieure :

Démonstration du théorème de Heine 8.7 via la borne supérieure.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.
Soit $\varepsilon > 0$. Considérons

$$A \coloneqq \left\{ x \in [a,b] \ :\ \exists \eta > 0, \forall x_1, x_2 \in [a,x],\ |x_1 - x_2| \leq \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon \right\}.$$

Alors $A \neq \varnothing$ puisque $a \in A$ et A est majoré par b. Donc A admet un supremum $S \coloneqq \sup(A)$.
Puisque $a \in A$ et que b est un majorant de A, on a $a \leq S \leq b$.
Supposons par l'absurde que $S < b$.

- Par continuité de f en S, il existe $\eta_1 > 0$ tel que
$$\forall x \in [a,b],\ |x - S| \leq \eta_1 \implies |f(x) - f(S)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$
- Par définition de S, il existe $c \in A$ tel que $S - \eta_1 < c \leq S$;
alors, puisque $c \in A$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que
$$\forall x_1, x_2 \in [a,c],\ |x_1 - x_2| \leq \eta_2 \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Posons $\eta \coloneqq \min(\eta_1, \eta_2) > 0$ et notons $\tilde{b} \coloneqq \min(b, S + \eta_1)$.
Soient $x_1, x_2 \in [a, \tilde{b}]$ tels que $|x_1 - x_2| \leq \eta$,

- si $x_1, x_2 \leq c$ alors $x_1, x_2 \in [a,c]$ et $|x_1 - x_2| \leq \eta \leq \eta_2$, d'où $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon$;
- si $x_1, x_2 \geq c$ alors $|x_i - S| \leq \eta_1$, d'où
$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(S) + f(S) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(S)| + |f(x_2) - f(S)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon;$$
- si $x_2 \leq c \leq x_1$ alors, puisque $|x_2 - c| \leq |x_1 - x_2| \leq \eta \leq \eta_2$, $|c - S| \leq \eta_1$ et $|x_1 - S| \leq \eta_1$, on a
$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_1) - f(c) + f(c) - f(S) + f(S) - f(x_2)| \\ &\leq |f(x_1) - f(c)| + |f(c) - f(S)| + |f(S) - f(x_2)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

On a montré que
$$\exists \eta > 0,\ \forall x_1, x_2 \in [a, \tilde{b}],\ |x_1 - x_2| \leq \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$
i.e. $\tilde{b} \in A$. Or $\sup(A) = S < \tilde{b}$, d'où une contradiction. Ainsi $\sup(A) = b$.
En raisonnant comme ci-dessus (en utilisant la continuité en b), on montre que $b \in A$. ■

TODO : *Lorsque la section sur les suites sera rédigée, ajouter démonstration séquentielle*

8.2 Exercices

Exercice 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est *lipschitzienne* s'il existe $k > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in I,\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$.
Montrer que si f est lipschitzienne alors f est uniformément continue.

Exercice 2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
Montrer que si f' est bornée alors f est uniformément continue.

Exercice 3. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que si f est uniformément continue alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe (et est finie).
2. Montrer que si la limite $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie alors f n'est pas uniformément continue.

Exercice 4. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Montrer que si f est uniformément continue alors $\exists a, b \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \leq ax + b$.
   Remarque : *cela reste vrai si le domaine est* $]-\infty, 0]$ *mais pas si le domaine est la droite réelle* $\mathbb{R}$ *toute entière puisque* $f(x) = |x|$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ *mais n'est pas majorée par une fonction affine.*
2. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ alors f n'est pas uniformément continue.
3. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ alors f n'est pas uniformément continue.

Exercice 5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, monotone et bornée où I est un intervalle.
Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 6. Soit $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction.
Montrer que si f est continue et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est uniformément continue.

Exercice 7.

1. Montrer que $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
2. Montrer que $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
3. Montrer que $\frac{1}{x} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
4. Montrer que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
5. Montrer que $\exp : \left[-\pi, \sqrt{42}\right] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue.
6. Montrer que $\sqrt{\cdot} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est uniformément continue.
7. Montrer que $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue.
8. Montrer que $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue.
9. Montrer que $\sin(1/x) :]0, 1[\to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
10. Montrer que $\sin(x^2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
    Indice : on peut vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{n\pi} \right) = 0.$

Exercice 8. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées et uniformément continues sur un intervalle.

1. Montrer que fg est uniformément continue.
2. La conclusion reste-t-elle valide si f et g ne sont pas bornées ?

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique continue.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 10. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer que si $\lim\limits_{\mathbb{N} \ni n \to +\infty} f(n) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. L'énoncé précédent reste-t-il vrai si l'on suppose la fonction seulement continue (au lieu de uniformément continue)?

Exercice 11.

1. Montrer que la propriété de Borel–Lebesgue n'est plus vraie si on remplace $[a, b]$ par un intervalle ouvert.
2. Montrer que la propriété de Borel–Lebesgue n'est plus vraie si les intervalles de la famille $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ne sont pas ouverts.

Exercice 12. ***TODO :*** *conséquences de Borel–Lebesgue*

9 Intégration

9.1 Sommes de Darboux & intégrales inférieure et supérieure

Définition 9.1. Une *subdivision* P d'un segment $[a, b]$ est la donnée[23] d'une suite finie de $[a, b]$ qui est strictement croissante, dont le premier élément est a et dont le dernier élément est b. On note une subdivision de la façon suivante :

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

Intuitivement, on a scindé $[a, b]$ en un nombre fini de segments qui ne s'intersectent qu'aux bords :

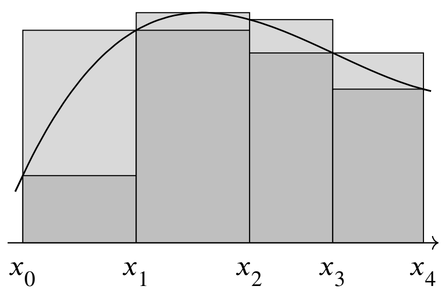
Définition 9.2. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$.
On définit la *somme de Darboux supérieure* de f selon P par

$$U_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \right)$$

et la *somme de Darboux inférieure* de f selon P par

$$L_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right).$$

Sur le dessin ci-dessous, la somme de Darboux supérieure correspond à l'aire représentée en gris (clair et foncé) et la somme de Darboux supérieure correspond à l'aire représentée en gris foncé (seulement).



Remarque 9.3. L'hypothèse "f est bornée" est importante pour s'assurer que les sommes de Darboux sont bien définies. En effet, les bornes supérieures et inférieures considérées existent alors par la propriété de la borne supérieure.

Proposition 9.4. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors, pour toute subdivision P de $[a, b]$, on a $U_P(f) \geq L_P(f)$.*

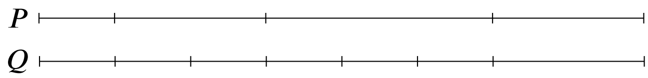
Démonstration.

$$\begin{aligned}
U_P(f) &= \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \right) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right) \quad \text{puisque } \sup f \geq \inf f \text{ et } x_k - x_{k-1} > 0 \\
&= L_P(f)
\end{aligned}$$

∎

[23]Formellement, c'est une partie finie de $[a, b]$ contenant a et b.

Définition 9.5. Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$. On dit que Q est *plus fine* que P si $P \subset Q$.



Proposition 9.6. *Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$. Si Q est plus fine que P alors*

$$U_Q(f) \leq U_P(f)$$

et

$$L_Q(f) \geq L_P(f).$$

Démonstration. Par récurrence, il suffit d'étudier le cas d'une subdivision d'un intervalle en deux intervalles. Soit $c \in]x_{k-1}, x_k[$, alors

$$\begin{aligned}(x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f &= (x_k - c + c - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \\ &= (c - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f + (x_k - c) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \\ &\geq (c - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},c]} f + (x_k - c) \sup_{[c,x_k]} f.\end{aligned}$$

L'inégalité pour les sommes de Darboux inférieures se démontre de façon similaire. ∎

Proposition 9.7. *Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$, alors $L_P(f) \leq U_Q(f)$.*

Démonstration. En effet, si on pose $R \coloneqq P \cup Q$ alors R est plus fine que P et que Q, donc

$$L_P(f) \leq L_R(f) \leq U_R(f) \leq U_Q(f).$$

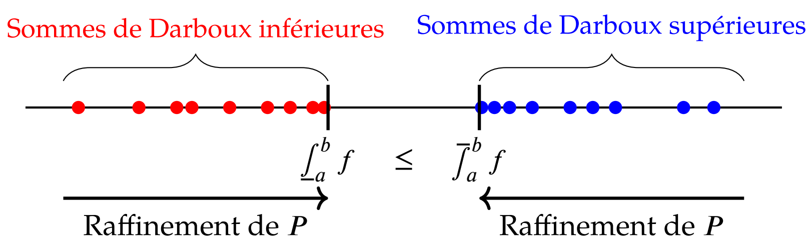
∎

Définition 9.8. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
On définit l'**intégrale inférieure** de f par

$$\underline{\int_a^b} f \coloneqq \sup \left\{ L_P(f) \ :\ P \text{ subdivision de } [\text{a,b}] \right\}$$

et l'**intégrale supérieure** de f par

$$\overline{\int_a^b} f \coloneqq \inf \left\{ U_P(f) \ :\ P \text{ subdivision de } [\text{a,b}] \right\}.$$



Définition 9.9. Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$.
Le *pas* de P est la plus grande des longueurs des segments de la subdivision :

$$\|P\| \coloneqq \max \left\{ x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots, x_n - x_{n-1} \right\}.$$

Proposition 9.10. *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de subdivisions vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} U_{P_n}(f) = \overline{\int_a^b} f \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} L_{P_n}(f) = \underline{\int_a^b} f.$$

Démonstration. Nous montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{P_n}(f) = \overline{\int_a^b} f$, le cas des sommes de Darboux inférieures se démontrant de façon similaire.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\overline{\int_a^b} f \coloneqq \inf\left\{U_P(f) \;:\; P \text{ subdivision de } [\text{a,b}]\right\}$, il existe une subdivision Q de $[a,b]$ telle que $\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} > U_Q(f)$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies \|P_n\| < \frac{\varepsilon}{1+4mM}$$

où $M \coloneqq \sup\limits_{[a,b]} |f|$ et $m \coloneqq |Q|$ (i.e. $m-1$ est le nombre d'intervalles composant Q).
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. Posons $R \coloneqq P_n \cup Q$.
Notons $R = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = b\}$ et $P_n = \{a = x_{i_0} < x_{i_1} < \cdots < x_{i_s} = b\}$ de sorte que $\{0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_s = r\} \subset \{0,1,\dots,r\}$. Alors

$$\begin{aligned}
U_{P_n}(f) - U_R(f) &= \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=i_{k-1}+1}^{i_k} (x_l - x_{l-1}) \left(\sup_{[x_{i_{k-1}},x_{i_k}]} f - \sup_{[x_{l-1},x_l]} f \right) \\
&= \sum_{\substack{k=1,\dots,s \\ ]x_{i_{k-1}},x_{i_k}[\cap Q \neq \varnothing}} \sum_{l=i_{k-1}+1}^{i_k} (x_l - x_{l-1}) \left(\sup_{[x_{i_{k-1}},x_{i_k}]} f - \sup_{[x_{l-1},x_l]} f \right) \\
&\leq \sum_{\substack{k=1,\dots,s \\ ]x_{i_{k-1}},x_{i_k}[\cap Q \neq \varnothing}} \sum_{l=i_{k-1}+1}^{i_k} (x_l - x_{l-1}) 2M \\
&= \sum_{\substack{k=1,\dots,s \\ ]x_{i_{k-1}},x_{i_k}[\cap Q \neq \varnothing}} (x_{i_k} - x_{i_{k-1}}) 2M \\
&\leq \sum_{\substack{k=1,\dots,s \\ ]x_{i_{k-1}},x_{i_k}[\cap Q \neq \varnothing}} \|P_n\| 2M \\
&\leq \|P_n\| 2Mm \\
&< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} > U_Q(f) \geq U_R(f) \geq U_{P_n}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$0 \leq U_{P_n}(f) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon.$$

On a bien montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies \left| U_{P_n}(f) - \overline{\int_a^b} f \right| \leq \varepsilon.$ ■

Proposition 9.11 (Relation de Chasles pour les intégrales inférieures et supérieures)**.**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $c \in [a,b]$, alors

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \qquad \textit{et} \qquad \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f.$$

Démonstration. Soit P une subdivision de $[a,b]$. On définit[24] $\tilde{P} \coloneqq P \cup \{c\}$.
Notons $\tilde{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. Soit $l \in \{0,\ldots,n\}$ tel que $x_l = c$. Alors

$$U_P(f) \geq U_{\tilde{P}}(f) = \sum_{k=1}^{i}\left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f\right) + \sum_{k=i+1}^{n}\left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f\right) \geq \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f.$$

Donc $\overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f$ est un minorant des sommes de Darboux supérieures de f. Il reste à montrer que c'est le plus petit.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\overline{\int_a^c} f + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{\int_a^c} f$ et donc $\overline{\int_a^c} f + \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant des sommes de Darboux supérieures. Ainsi, il existe une subdivision $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c\}$ de $[a,c]$ telle que

$$U_{P_1}(f) < \overline{\int_a^c} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe une subdivision $P_2 = \{c = y_0 < y_1 < \cdots y_m = b\}$ de $[c,b]$ telle que

$$U_{P_2}(f) < \overline{\int_c^b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons la subdivision $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ de $[a,b]$ alors

$$U_P(f) = U_{P_1}(f) + U_{P_2}(f) < \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f + \varepsilon.$$

Ainsi $\displaystyle \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f = \inf\left\{U_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de } [\mathrm{a,b}]\right\} = \overline{\int_a^b} f.$

On obtient de façon analogue le résultat pour l'intégrale inférieure (on peut aussi se ramener à l'intégrale supérieure en considérant $-f$). ■

9.2 Intégrale de Riemann *à la Darboux*

Définition 9.12. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
On dit que f est *intégrable* si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.
Le cas échéant, on dénote cette quantité par

$$\int_a^b f(x)dx \coloneqq \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Exemple 9.13. Une fonction bornée sur un segment peut ne pas être intégrable. Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $\displaystyle \underline{\int_0^1} f = 0$ et $\displaystyle \overline{\int_0^1} f = 1.$
Nous verrons dans la suite du chapitre différents critères d'intégrabilité.

[24]Si $c \in P$ alors $\tilde{P} = P$ et sinon, on obtient $\tilde{P}$ en subdivisant un intervalle de P.

Proposition 9.14 (Relation de Chasles)**.** *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.*
Alors f est intégrable si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables ; dans ce cas, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration.
$\Rightarrow$ Si f est intégrable alors

$$0 = \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f - \underline{\int_a^c} f - \underline{\int_c^b} f = \left(\overline{\int_a^c} f - \underline{\int_a^c} f\right) + \left(\overline{\int_c^b} f - \underline{\int_c^b} f\right).$$

Puisque $\overline{\int_a^c} f - \underline{\int_a^c} f \geq 0$ et $\overline{\int_c^b} f - \underline{\int_c^b} f \geq 0$, on a forcément $\overline{\int_a^c} f - \underline{\int_a^c} f = 0$ et $\overline{\int_c^b} f - \underline{\int_c^b} f = 0$.
Donc $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables.

$\Leftarrow$ Si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables alors

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f = \underline{\int_a^b} f,$$

donc f est intégrable. ■

Corollaire 9.15. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et si $[c,d] \subset [a,b]$ alors $f_{|[c,d]} : [c,d] \to \mathbb{R}$ est intégrable.*

Remarque 9.16 (Convention de Chasles)**.**
Par définition, $\int_a^a f = 0$, ainsi, du fait de la relation de Chasles, il est naturel d'introduire la notation suivante : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable alors on pose

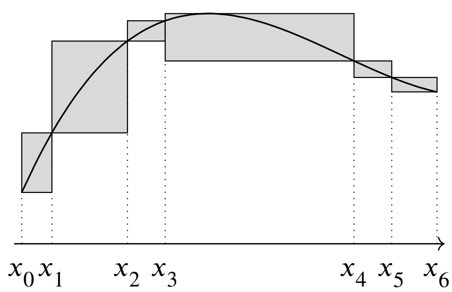
$$\int_b^a f(x)dx \coloneqq -\int_a^b f(x)dx.$$

9.3 Un premier critère d'intégrabilité

Théorème 9.17. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{ une subdivision } P \text{ de } [a,b] \text{ telle que } U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$$

Remarque 9.18. Ce critère a une interprétation graphique très naturelle : il signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivisation de $[a,b]$ telle que l'aire grisée ci-dessous soit plus petite que ε.



En revanche, ce critère ne donne pas la valeur de l'intégrale.

Démonstration.
$\Rightarrow$: Supposons que f soit intégrable, i.e.

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \tag{4}$$

où

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{L_P(f)\ :\ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\}$$

et

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\left\{U_P(f)\ :\ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Alors $\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{\int_a^b} f$ et donc $\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant des sommes de Darboux supérieures. Ainsi, il existe une subdivision P_1 de $[a, b]$ telle que

$$U_{P_1}(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe une subdivision P_2 de $[a, b]$ telle que

$$L_{P_2}(f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $P := P_1 \cup P_2$. Alors P est plus fine que P_1 et donc

$$U_P(f) \leq U_{P_1}(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

et, similairement, P est plus fine que P_2 et donc

$$L_P(f) \geq L_{P_2}(f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

On déduit de (5) et (6) que

$$U_P(f) - L_P(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

où la dernière égalité découle de (4).
On a ainsi construit une subdivision P de $[a, b]$ telle que $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$.
$\Leftarrow$: Supposons que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{ une subdivision } P \text{ de } [a, b] \text{ telle que } U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$$

et on veut montrer que f est intégrable, i.e. $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Soit $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse, il existe une subdivision P de $[a, b]$ telle que $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$.
Alors

$$L_P(f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U_P(f)$$

d'où

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon.$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \varepsilon$$

et donc $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, i.e. f est intégrable. ∎

9.4 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Théorème 9.19. *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in \mathbb{R}$, alors*

1. $(f+g) : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est intégrable et*
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$
2. $(cf) : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est intégrable et*
$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$
3. $(fg) : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est intégrable et on a l'inégalité de Cauchy–Schwarz*
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx,$$
4. *si* $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$,
5. $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est intégrable et* $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

Remarque 9.20. Il se peut que l'inégalité de Cauchy–Schwarz soit stricte.
Considérons $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 = 0$ mais $\int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx = \frac{1}{4}$.

Remarque 9.21. La réciproque du point 5 est fausse. Considérons $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $|f|$ est intégrable mais f ne l'est pas.

Démonstration de 9.19.

1. $$\begin{aligned}\int_a^b f + \int_a^b g &= \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \\ &\leq \underline{\int_a^b} (f+g) \\ &\leq \overline{\int_a^b} (f+g) \\ &\leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g \\ &= \int_a^b f + \int_a^b g\end{aligned}$$

   Donc
   $$\overline{\int_a^b}(f+g) = \underline{\int_a^b}(f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. Si $c \geq 0$ alors
   $$\begin{aligned}\underline{\int_a^b}(cf) &= c\,\underline{\int_a^b} f \\ &= c\,\overline{\int_a^b} f \\ &= \overline{\int_a^b}(cf) \quad \text{que l'on vérifie à l'aide des sommes de Darboux.}\end{aligned}$$

   Donc
   $$\overline{\int_a^b}(cf) = \underline{\int_a^b}(cf) = c\int_a^b f.$$

   Pour obtenir le cas $c < 0$, il suffit de démontrer le cas $c = -1$:
   $$\begin{aligned}\underline{\int_a^b}(-f) &= -\overline{\int_a^b}(f) \quad \text{car } \inf(-f) = -\sup(f) \\ &= -\underline{\int_a^b}(f) \quad \text{car } f \text{ est intégrable} \\ &= \overline{\int_a^b}(-f) \quad \text{car } \sup(-f) = -\inf(f)\end{aligned}$$

   Donc
   $$\underline{\int_a^b}(-f) = \overline{\int_a^b}(-f) = -\int_a^b f.$$

3. Montrons d'abord que si f est intégrable alors f^2 l'est aussi.
   Puisque f est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$. Alors
   $$\begin{aligned}\left|f(x)^2 - f(y)^2\right| &= |f(x)+f(y)|\;|f(x)-f(y)| \\ &\leq (|f(x)|+|f(y)|)\,|f(x)-f(y)| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &\leq 2M\,|f(x)-f(y)|\end{aligned}$$

Donc, pour tout segment I,

$$\sup_I \left(f^2\right) - \inf_I \left(f^2\right) \leq 2M \left(\sup_I(f) - \inf_I(f) \right)$$

et ainsi, pour toute subdivision P de $[a,b]$, on a

$$U_P\left(f^2\right) - L_P\left(f^2\right) \leq 2M \left(U_P(f) - L_P(f)\right).$$

On peut alors conclure que f^2 est intégrable à l'aide du critère donné au Théorème 9.17.

Ensuite, $fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$ est intégrable par les points déjà démontrés.

Il reste à démontrer l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Pour cela, considérons

$$\theta(t) := \int_a^b (f(x)+tg(x))^2 dx = \left(\int_a^b g(x)dx\right) t^2 + \left(2\int_a^b f(x)g(x)dx\right) t + \left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

Puisque θ est un polynôme quadratique positif, son discriminant est négatif :

$$\left(2\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_a^b f(x)dx\right) \leq 0.$$

4. $\displaystyle\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f) = \overline{\int_a^b} (g-f) \geq 0$

5. On déduit de l'inégalité triangulaire inversée :

$$\begin{aligned} & \forall x,y \in [a,b],\ |f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \\ \implies & \sup_I(|f|) - \inf_I(|f|) \leq \sup_I(f) - \inf_I(f) \quad \text{pour tout segment } I \\ \implies & U_P(|f|) - L_P(|f|) \leq U_P(f) - L_P(f) \quad \text{pour toute subdivision } P \end{aligned}$$

On peut alors conclure que $|f|$ est intégrable à l'aide du critère donné au Théorème 9.17.
Pour la dernière inégalité, il suffit de remarquer que

$$|f| \geq f \implies \int_a^b |f| \geq \left(\int_a^b f\right) \quad \text{et} \quad |f| \geq -f \implies \int_a^b |f| \geq -\left(\int_a^b f\right).$$

■

Corollaire 9.22. *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est intégrable alors* $f_+, f_- : [a,b] \to \mathbb{R}$ *définies par* $f_+ := \max(f,0)$ *et* $f_- := -\min(f,0)$ *sont intégrables aussi.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser les relations

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad \text{et} \quad \min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

■

9.5 Quelques conditions suffisantes d'intégrabilité

9.5.1 Monotonie

Théorème 9.23. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone alors f est intégrable.*

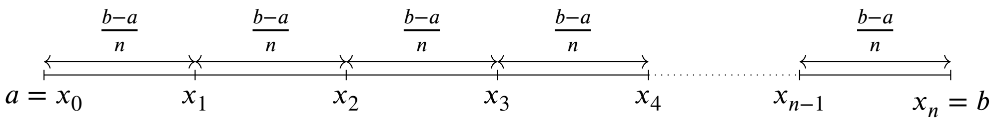
Démonstration. Supposons que f soit croissante (l'autre cas s'en déduit en considérant $-f$).

Montrons d'abord que f est bornée.
Soit $x \in [a,b]$, alors $a \leq x \leq b$ et donc $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $n \coloneqq \left\lfloor \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Alors $n \geq 1$ et

$$\frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{n} \leq \varepsilon. \tag{7}$$

Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ la subdivision consistant en n segments de même longueur, i.e. $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$:



Puisque f est croissante, on a

$$\sup_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_k) \qquad \text{et} \qquad \inf_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_{k-1}).$$

Alors

$$U_P(f) = \sum_{k=1}^{n}\left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n} f(x_k)\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

et

$$L_P(f) = \sum_{k=1}^{n}\left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n} f(x_{k-1})\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
U_P(f) - L_P(f) &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \\
&= \frac{b-a}{n}\big(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})\big) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))
\end{aligned}$$

On déduit de (7) que $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$.
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision P de $[a,b]$ telle que $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$.
Donc f est intégrable d'après le critère donné au Théorème 9.17. ■

Remarque 9.24. Nous avons vu dans la démonstration que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone alors f est nécessairement bornée.

9.5.2 Continuité

Théorème 9.25. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.*

Démonstration. Remarquons d'abord que f est bornée d'après le Théorème de Weierstrass (cf 4.10) puisqu'il s'agit d'une fonction continue sur un segment.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine (cf Théorème 8.7) f est uniformément continue. Donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b],\ |x_1 - x_2| \leq \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Posons $n := \left\lfloor \frac{b-a}{\eta} \right\rfloor + 1$ et considérons la subdivision $P := \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ où $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$. Alors $x_{k+1} - x_k \leq \eta$ et ainsi

$$\begin{aligned} U_P(f) - L_P(f) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \left(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \frac{\varepsilon}{b-a} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision P de $[a,b]$ telle que $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$.
Donc f est intégrable d'après le critère donné au Théorème 9.17. ■

9.6 Critère de Lebesgue

9.6.1 Oscillation d'une fonction

Définition 9.26. Soient $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction bornée définie sur $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$.
L'*oscillation de f en a* est

$$o(f,a) := \lim_{\delta \to 0^+} \left(\sup_{A \cap]a-\delta, a+\delta[} f - \inf_{A \cap]a-\delta, a+\delta[} f \right).$$

Remarque 9.27. L'oscillation $o(f,a)$ est bien définie (dès lors que f est bornée) :

- Soient $\delta > 0$ et $a \in A \cap (a-\delta, a+\delta)$ alors $\{f(x) : x \in A \cap (a-\delta, a+\delta)\}$ est non-vide puisqu'il contient $f(a)$. De plus, cet ensemble est borné par hypothèse. Donc ses bornes supérieures et inférieures sont bien définies.
- La fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(\delta) := \left(\sup_{A \cap]a-\delta, a+\delta[} f - \inf_{A \cap]a-\delta, a+\delta[} f \right)$ est croissante et minorée par 0. Donc $\lim_{\delta \to 0^+} g(\delta)$ est bien défine d'après le théorème de la limite monotone (Théorème 3.40).

Proposition 9.28. *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction bornée définie sur $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. Alors f est continue si et seulement si $o(f, a) = 0$.*

Démonstration.
$\Rightarrow$: Supposons que f soit continue en a.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, si $|x - a| \le \delta$ alors $|f(x) - f(a)| \le \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc $o(f, a) \le \sup\limits_{A \cap (a-\delta, a+\delta)} f - \inf\limits_{A \cap (a-\delta, a+\delta)} f \le \varepsilon$ (la première inégalité découle de la monotonie de g).
Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, $o(f, a) \le \varepsilon$. So $o(f, a) = 0$.

$\Leftarrow$: Supposons que $o(f, a) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Alors il existe $\delta > 0$ tel que $\sup\limits_{A \cap (a-\delta, a+\delta)} f - \inf\limits_{A \cap (a-\delta, a+\delta)} f < \varepsilon$ (puisque $\lim\limits_{\delta \to 0^+} g(\delta) = 0$).
Si $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$ alors $|f(x) - f(a)| \le \sup\limits_{A \cap (a-\delta, a+\delta)} f - \inf\limits_{A \cap (a-\delta, a+\delta)} f < \varepsilon$.
Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

i.e. f continue en a. ■

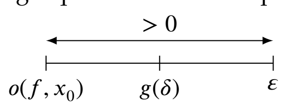
Lemme 9.29. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée où $a < b$.
Soit $\varepsilon > 0$. Posons $A_\varepsilon := \{x \in [a, b] : o(f, x) < \varepsilon\} \cup]-\infty] - \infty, a[\cup]b, +\infty[$.
Alors, pour tout $x_0 \in A_\varepsilon$ il existe $\eta > 0$ tel que*[25] $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset A_\varepsilon$.

Démonstration. Soit $x_0 \in A_\varepsilon$.

- Premier cas : supposons que $x_0 < a$.
  En posant $\delta := \frac{a - x_0}{2}$, on a $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset] - \infty, a[\subset A_\varepsilon$.
- Deuxième cas : supposons que $x_0 > b$.
  En posant $\delta := \frac{x_0 - b}{2}$, on a $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset]b, +\infty[\subset A_\varepsilon$.
- Troisième et dernier cas : supposons que $x_0 \in [a, b]$ et $o(f, x_0) < \varepsilon$.
  Alors il existe[26] $\delta > 0$ tel que $\sup\limits_{[a,b] \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[} f - \inf\limits_{[a,b] \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[} f < \varepsilon$.
  Soit $y \in \left]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right[\cap [a, b]$.
  Si $z \in \left]y - \frac{\delta}{2}, y + \frac{\delta}{2}\right[$ alors $|x_0 - z| = |x_0 - y + y - z| \le |x_0 - y| + |y - z| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$.
  Donc $\left]y - \frac{\delta}{2}, y + \frac{\delta}{2}\right[\subset \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[$.
  D'où $\sup\limits_{[a,b] \cap]y-\delta/2, a+\delta/2[} f - \inf\limits_{[a,b] \cap]y-\delta/2, a+\delta/2[} f \le \sup\limits_{[a,b] \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[} f - \inf\limits_{[a,b] \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[} f < \varepsilon$.
  Ainsi $o(f, y) < \varepsilon$ et $\left]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right[\cap [a, b] \subset \{x \in [a, b] : o(f, x) < \varepsilon\}$.
  Donc $\left]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right[\subset A_\varepsilon$.

■

[25] On dit que A_ε est *ouvert*, notion centrale de la topologie que vous étudierez plus tard

[26] Puisque $o(f, x_0) = \lim\limits_{\delta \to 0^+} g(\delta)$, il existe $\delta > 0$ tel que :


où $g(\delta) := \left(\sup\limits_{[a,b] \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[} f - \inf\limits_{[a,b] \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[} f \right)$ est bien définie puisque $x_0 \in [a, b]$ et que f est bornée.

Lemme 9.30. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée où $a < b$.*
Soit $\varepsilon > 0$. Posons $B_\varepsilon \coloneqq \{x \in [a,b] \ : \ o(f,x) \geq \varepsilon\}$.
Si $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille d'intervalles ouverts telle que

$$B_\varepsilon \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda.$$

Alors il existe[27] *une partie finie $\Lambda' \subset \Lambda$ telle que $B_\varepsilon \subset \bigcup_{\lambda'\in\Lambda} I_\lambda$.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, pour tout $x \in [a,b]$ tel que $o(f,x) < \varepsilon$, il existe un intervalle ouvert $J_x \subset A_\varepsilon$.
Alors $[a,b] \subset \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) \cup \left(\bigcup_{x\in[a,b]\,:\,o(f,x)<\varepsilon} J_x\right)$.
D'après la propriété de Borel–Lebesgue, voir Lemme 8.8, $[a,b]$ admet un sous-recouvrement fini de la forme :

$$[a,b] \subset \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda'} I_\lambda\right) \cup \left(\bigcup_{x\in\Gamma} J_x\right).$$

Si $x \in \Gamma$ alors $J_x \subset A_\varepsilon$ et donc $J_x \cap B_\varepsilon = \varnothing$.
Ainsi $B_\varepsilon \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} I_\lambda$. ∎

9.6.2 Énoncé et démonstration du critère de Lebesgue

Définition 9.31. Une partie $S \subset \mathbb{R}$ est *négligeable*[28] si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite de segments $\left([a_n,b_n]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

(i) $S \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n,b_n]$, et

(ii) $\sum_{n\geq 0} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

Proposition 9.32. *Une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.*

Démonstration. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ensembles négligeables.
Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe une famille dénombrable de segments $\left([a_k^n, b_k^n]\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$A_n \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [a_k^n, b_k^n] \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq 0} \left(b_k^n - a_k^n\right) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Alors $\left([a_k^n, b_k^n]\right)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\in\mathbb{N}}}$ est une famille dénombrable de segments vérifiant

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\in\mathbb{N}}} [a_k^n, b_k^n]$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(b_k^n - a_k^n\right) < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \varepsilon.$$

∎

[27] Toujours en utilisant le vocabulaire de la topologie, on dit que B_ε est compact.
[28] Ou de *mesure nulle*.

Théorème 9.33 (Critère de Lebesgue)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable si et seulement si $\left\{x \in [a,b] \,:\, f \text{ n'est pas continue en } x\right\}$ est négligeable.*

Démonstration.
⇒ Supposons que f soit intégrable. Posons $B_m \coloneqq \left\{x \in [a,b] \,:\, o(f,x) \geq \frac{1}{m}\right\}$.
D'après la Proposition 9.28, $\left\{x \in [a,b] \,:\, f \text{ n'est pas continue en } x\right\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} B_m$.
Donc, d'après la Proposition 9.32, il suffit de montrer que chaque B_m est négligeable.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors, d'après le Théorème 9.17, il existe une subdivision $P \coloneqq \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ de $[a,b]$ telle que $U_P(f) - L_P(f) \leq \frac{\varepsilon}{2m}$.
Notons $\mathcal{K} \coloneqq \left\{k \in \{0,\dots,n-1\} \,:\, \exists x \in]x_k, x_{k+1}[,\ o(f,x) \geq \frac{1}{m}\right\}$, alors[29]

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathcal{K}} (x_{k+1}-x_k)\frac{1}{m} &\leq \sum_{k\in\mathcal{K}} (x_{k+1}-x_k)\left(\sup_{[x_k,x_{k+1}]} f - \inf_{[x_k,x_{k+1}]} f\right)\\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k)\left(\sup_{[x_k,x_{k+1}]} f - \inf_{[x_k,x_{k+1}]} f\right)\\
&= U_P(f) - L_P(f)\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2m}
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{k\in\mathcal{K}} (x_{k+1}-x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi

$$B_m \subset \left(\bigcup_{k\in\mathcal{K}}]x_k, x_{k+1}[\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n} \left]x_k - \frac{\varepsilon}{4(n+1)}, x_k + \frac{\varepsilon}{4(n+1)}\right[\right)$$

et

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} (x_{k+1}-x_k) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2(n+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a bien montré que B_m est négligeable.

⇐ Soit $\varepsilon > 0$. Posons $B \coloneqq \left\{x \in [a,b] \,:\, o(f,x) \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right\}$.
Alors, d'après la Proposition 9.28, $B \subset \left\{x \in [a,b] \,:\, f \text{ n'est pas continue en } x\right\}$ et donc B est négligeable.
Ainsi, il existe une suite $\left(]a_k, b_k[\right)_{k\in\mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts telle que $B \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]a_k, b_k[$ et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (b_k - a_k) \leq \frac{\varepsilon}{2\left(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f\right)}. \tag{8}$$

D'après le Lemme 9.30, on peut supposer que cette suite est finie, i.e. que $k = 1, \dots, K$.
De plus, on peut aussi supposer que ces intervalles sont deux à deux disjoints. En effet, si

[29] Notons que l'on a omis les bords des intervalles de la subdivisions, i.e. les x_k, afin d'obtenir la première inégalité. En effet, $o(f, x_k)$ dépend des valeurs de f au voisinage de x_k et pas seulement des valeurs de f dans un des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ ou $[x_{k-1}, x_k]$.
En effet, soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ sur $[0,1[$ et $f(x) = 42$ sur $[1,2]$, alors $o(f,1) = 42$ et $1 \in [1,2]$ mais $\sup_{[1,2]} f - \inf_{[1,2]} f = 0$, donc l'inégalité suivante est fausse : $\sup_{[1,2]} f - \inf_{[1,2]} f \geq o(f,1)$.
Nous considérerons les x_k plus tard, ce qui ne pose pas problème puisqu'ils sont en nombre fini.

$]a_k,b_k[\cap]a_l,b_l[\neq\varnothing$ alors $]a_k,b_k[\cup]a_l,b_l[=\left]\min(a_k,a_l),\max(b_k,b_l)\right[$ et $\max(b_k,b_l)-\min(a_k,a_l)\leq(b_k-a_k)+(b_l-a_l)$ de sorte que la condition (8) est toujours vérifiée.
Quitte à réordonner les intervalles et à enlever les éventuels intervalles ne rencontrant pas B, on peut supposer que $a_0<b_0<a_1<b_2<\cdots<a_K<b_K$ et que

$$\forall k\in\{0,\dots,K\},\ [a_k,b_k]\cap B\neq\varnothing.$$

Les bords de ces intervalles induisent[30] une subdivision $P\coloneqq\{a=x_0<\cdots<x_n=b\}$ de $[a,b]$. On note $\mathcal{K}\coloneqq\left\{k\in\{0,\dots,n-1\}\ :\ ]x_k,x_{k+1}[\cap B\neq\varnothing\right\}$ les intervalles de la subdivisions provenant des $]a_k,b_k[$ et $\mathcal{L}\coloneqq\{1,\dots,n\}\setminus\mathcal{K}$ les autres.

Soit $k\in\mathcal{L}$ et $x\in[x_k,x_{k+1}]$.
Alors $o(f,x)<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ et il existe donc $\delta_x>0$ tel que $\left(\sup\limits_{]x-\delta_x,x+\delta_x[}f-\inf\limits_{]x-\delta_x,x+\delta_x[}f\right)<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
D'après la propriété de Borel–Lebesgue, voir Lemme 8.8, il existe $\Gamma\subset[x_k,x_{k+1}]$ finie telle que $[x_k,x_{k+1}]\subset\bigcup\limits_{x\in\Gamma}]x-\delta_x,x+\delta_x[$.
Donc, quitte à subdiviser $\mathcal{L}$, on peut supposer que si $k\in\mathcal{L}$ alors

$$\forall x\in[x_k,x_{k+1}],\ \sup_{[x_k,x_{k+1}]}f-\inf_{[x_k,x_{k+1}]}f\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
U_P(f)-L_P(f)&=\sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{k+1}-x_k\right)\left(\sup_{[x_k,x_{k+1}]}f-\inf_{[x_k,x_{k+1}]}f\right)\\
&=\sum_{k\in\mathcal{K}}\left(x_{k+1}-x_k\right)\left(\sup_{[x_k,x_{k+1}]}f-\inf_{[x_k,x_{k+1}]}f\right)+\sum_{k\in\mathcal{L}}\left(x_{k+1}-x_k\right)\left(\sup_{[x_k,x_{k+1}]}f-\inf_{[x_k,x_{k+1}]}f\right)\\
&\leq\sum_{k\in\mathcal{K}}\left(x_{k+1}-x_k\right)\left(\sup_{[a,b]}f-\inf_{[a,b]}f\right)+\sum_{k\in\mathcal{L}}\left(x_{k+1}-x_k\right)\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\\
&\leq\frac{\varepsilon}{2\left(\sup\limits_{[a,b]}f-\inf\limits_{[a,b]}f\right)}\left(\sup_{[a,b]}f-\inf_{[a,b]}f\right)+(b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\\
&=\varepsilon
\end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une subdivision P de $[a,b]$ telle que $U_P(f)-L_P(f)\leq\varepsilon$. Donc, d'après le Théorème 9.17, f est intégrable. ■

9.7 Théorème de la moyenne

Le résultat suivant est une version intégrale du théorème des accroissements finis.

Théorème 9.34 (Théorème de la moyenne)**.** *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe $c\in[a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c).$$

[30]On prendra garde que $P=\{a<a_0<b_0<a_1<\cdots\}$ si $a<a_0$ mais que $P=\{a<b_0<a_1<b_1<\cdots\}$ si $a_0<a$; et de même pour b.

Démonstration. Remarquons d'abord que f est intégrable car continue.
Puisque $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur un segment, d'après le théorème de Weierstrass (cf 4.10) il existe $s, S \in [a,b]$ tels que $\forall x \in [a,b],\ f(s) \leq f(x) \leq f(S)$.
D'où

$$f(s)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(S)(b-a)$$

et

$$f(s) \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq f(S).$$

Puisque f est continue, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

■

9.8 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 9.35. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Définissons $F : I \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors F est dérivable et $F' = f$.*

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Soit $x \in I$ tel que $x \neq x_0$, alors

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

D'après le théorème de la moyenne (cf 9.34), il existe $\xi \in [x, x_0]$ si $x_0 > x$ ou $\xi \in [x_0, x]$ sinon, tel que

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi).$$

Remarquons que ξ tend vers x_0 lorsque x tend vers x_0, donc, par continuité de f, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\xi \to x_0} f(\xi) = f(x_0).$$

Ainsi F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

Définition 9.36. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$. On dit que $F : D \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de f si F est dérivable et si $F' = f$.

Remarque 9.37. On déduit du Théorème 9.35) que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

Corollaire 9.38. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle et $a \in I$. Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Démonstration. Définissons $G : I \to \mathbb{R}$ par $G(x) = F(x) - \int_a^x f(t)dt$.
Alors, d'après le Théorème 9.35, G est dérivable sur I et $G' = f - f = 0$.
Donc G est constante sur I, i.e. il existe $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ G(x) = C$. Ainsi

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

■

Corollaire 9.39. *Deux primitives d'une fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.*

Remarque 9.40. L'hypothèse que le domaine est un intervalle est importante. Sans cela, on peut trouver deux primitives dont la différence n'est pas contante.
Définissons par exemple $F_1, F_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par

$$F_1(x) = \ln(|x|) \qquad \text{et} \qquad F_2(x) = \begin{cases} \ln(|x|) + 42 & \text{si } x > 0 \\ \ln(|x|) - \pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

alors F_1 et F_2 sont deux primitives de $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ mais $F_1 - F_2$ n'est pas constante.

Théorème 9.41 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. On déduit du Corollaire 9.38, qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Ainsi $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt + C - \int_a^a f(t)dt - C = \int_a^b f(t)dt.$ ■

Remarque 9.42. Pour des raisons de concision, en pratique on note $[F(x)]_{x=a}^{x=b} \coloneqq F(b) - F(a)$ (ou plus simplement $[F(x)]_a^b$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible).

On peut en fait affaiblir les hypothèses : le théorème fondamental de l'analyse reste vrai pour une fonction intégrable (non nécessairement continue).

Théorème 9.43. *Supposons que $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit une primitive de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*
Si f est intégrable alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est intégrable, on déduit du Théorème 9.17 qu'il existe une subdivision $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ telle que $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$.
Ensuite,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) F'(c_k) \end{aligned}$$

où $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ existe d'après le théorème des accroissements finis.
Puisque $\inf_{[x_{k-1},x_k]} f \leq F'(c_k) \leq \sup_{[x_{k-1},x_k]} f$, on obtient que

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \leq F(b) - F(a) \leq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f$$

i.e.

$$L_P(f) \leq F(b) - F(a) \leq U_P(f).$$

De plus, on sait que
$$L_P(f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U_P(f).$$
Donc
$$\left|F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon.$$
Ainsi, on a montré que
$$\forall \varepsilon > 0, \left|F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \varepsilon.$$
■

Remarque 9.44. En revanche, l'hypothèse d'intégrabilité n'est pas superflue. Une fonction peut admettre une primitive sans être intégrable.
Par exemple, définissons $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ par
$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
alors F est dérivable mais $f = F'$ n'est pas intégrable (car non bornée).

9.9 Intégration par parties

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la formule de dérivation d'un produit.

Théorème 9.45. *Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que u' et v' soient intégrables sur $[a,b]$, alors*
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration. On sait que les fonctions u et v sont continues et donc intégrables. De même les fonctions u' et v' sont intégrables par hypothèse.
Donc, d'après Théorème 9.19, les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)' = u'v + uv'$ sont intégrables et
$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b$$
où la dernière égalité provient de Théorème 9.43. ■

Remarque 9.46. Dans la pratique les fonctions u et v sont généralement dérivables de dérivées continues (et donc u' et v' sont intégrables car continues).

Exemple 9.47. On souhaite calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)dx$.
On considère $u, v : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définies par $u(x) = -\cos(x)$ et $v(x) = x$ alors $u'(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = 1$, d'où par IPP
$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin(x)dx = \int_0^\pi u'(x)v(x)dx &= [u(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u(x)v'(x)dx \\ &= \pi + \int_0^\pi \cos(x)dx = \pi + [\sin(x)]_0^\pi = \pi.\end{aligned}$$

Exemple 9.48. On souhaite calculer l'intégrale suivante : $I \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^x dx$.

On considère $u_1, v_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définies par $u_1(x) = e^x$ et $v_1(x) = \cos(x)$ alors $u_1'(x) = e^x$ et $v_1'(x) = -\sin(x)$, d'où par IPP :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1'(x)v_1(x)dx = \left[u_1(x)v_1(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(x)v_1'(x)dx = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)dx.$$

On considère désormais $u_2, v_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définies par $u_2(x) = e^x$ et $v_2(x) = \sin(x)$ alors $u_2'(x) = e^x$ et $v_2'(x) = \cos(x)$, d'où par IPP :

$$\begin{aligned} I &= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_2'(x)v_2(x) \\ &= -1 + \left[u_2(x)v_2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_2(x)v_2'(x)dx \\ &= -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)dx = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I. \end{aligned}$$

Donc $I = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

9.10 Intégration par changement de variable

Le résultat suivant découle de la formule de dérivation d'une composée. Il est possible d'affaiblir les hypothèses de régularité des fonctions mais la démonstration devient alors plus compliquée pour un gain qui n'est généralement pas rentable en pratique.

Théorème 9.49. *Soient $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue et f une fonction continue sur $\varphi([a,b])$. Alors*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Démonstration. Remarquons que $I \coloneqq \varphi([a,b])$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires 4.7 (et même un segment d'après le théorème de Weierstrass 4.10).
D'après Théorème 9.35, f admet une primitive F sur I. Puisque f est continue, et donc intégrable, sur $[\min(\varphi(a),\varphi(b)), \max(\varphi(a),\varphi(b))]$ et que $(F\circ\varphi)' = f\circ\varphi\cdot\varphi'$ est continue, et donc intégrable, sur $[a,b]$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx &= \int_a^b (F\circ\varphi)'(x)dx \\ &= F\circ\varphi(b) - F\circ\varphi(a) \quad \text{d'après Théorème 9.41} \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(u)du \quad \text{d'après Théorème 9.41.} \end{aligned}$$

Remarquons que d'après la convention de Chasles (voir Remarque 9.16) la dernière égalité est vraie même si $\varphi(b) \leq \varphi(a)$. ∎

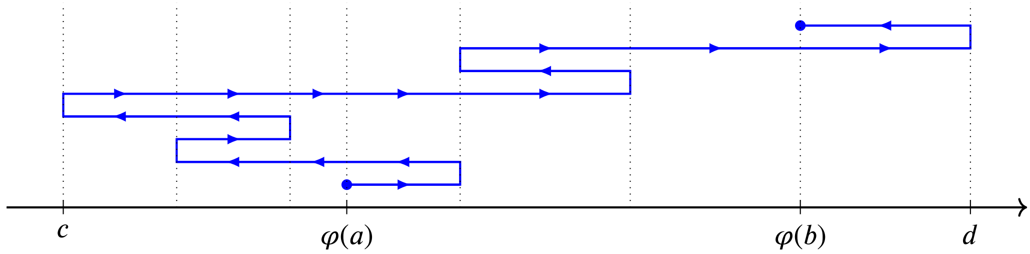
Remarque 9.50. En pratique, pour des raisons mnémotechniques, on voit φ comme une nouvelle variable dénotée u et on écrit sa dérivée avec la notation de Leibniz $\frac{du}{dx} := \varphi'(x)$, autrement dit, on écrit

$$u = \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad du = \varphi'(x)dx$$

de sorte que la formule du théorème s'écrive alors (en prenant garde à changer les bornes) :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Remarque 9.51. Pour des raisons de concision, on suppose dans cette remarque que $\varphi(a) \leq \varphi(b)$. D'après le théorème de Weierstrass 4.10, $\varphi([a,b])$ est un segment et donc il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $c \leq d$ et $\varphi([a,b]) = [c,d]$.
L'énoncé ci-dessus est vrai sans supposer que φ est injective (hypothèse qui sera nécessaire pour la formule de changement de variable multivariée).
Ainsi, il est possible que $[\varphi(a), \varphi(b)] \subsetneq \varphi([a,b]) = [c,d]$. On prendra alors bien garde que l'énoncé fait intervenir les bornes $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ (et non pas c et d).
Intuitivement, au-dessus d'un point de $[c,d] \setminus [\varphi(a), \varphi(b)]$ la fonction φ passe toujours un nombre pair de fois avec des orientations alternées, de sorte ces points n'apportent pas de contribution à l'intégrale du fait de la convention de Chasles (voir Remarque 9.16).



Attention, on ne peut néanmoins pas omettre la condition que f est définie et continue sur $[c,d]$ (et non pas seulement sur $[\varphi(a), \varphi(b)]$).
Voici un contre-exemple où le changement de variable est donné par $\varphi(x) = \sin(x)$:

$$0 = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\arcsin u}{u\sqrt{1-u^2}} du = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin x} dx > 0.$$

Ici $\sin\left(\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]\right) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ mais l'intégrande $\frac{\arcsin u}{u\sqrt{1-u^2}}$ n'est pas définie lorsque $u = 1$.

Exemple 9.52. On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx$.

On pose $u = \sin(x)$ alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Dans l'exemple précédent, nous reconnaissons une intégrale de la forme $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$; dans ce cas la formule de changement de variable n'apporte généralement pas beaucoup puisque l'intégrande est déjà sous la forme de la dérivée d'une composition :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^3}{3}\right)'(x)dx = \left[\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

L'exemple suivant est plus intéressant puisque nous avons maintenant un terme de la forme $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$, difficile à calculer directement, et où il faut désormais trouver un changement de variable φ satisfaisant.

Exemple 9.53. On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.
On pose $x = \sin(\theta)$ alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\,d\theta \quad \text{puisque cos est positive sur } \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\theta)+1}{2}\theta = \left[\frac{\sin(2\theta)+2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

9.11 Fonction nulle en dehors d'une partie négligeable

Théorème 9.54. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable telle que $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\})$ soit négligeable alors $\displaystyle\int_a^b f = 0$.*

Démonstration. Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, il existe $c_k \in [x_{k-1},x_k]$ tel que $f(c_k) = 0$. Donc

$$U_P(f) = \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f\right) \geq 0 \geq L_P(f) = \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f\right).$$

Puisque 0 est un minorant des sommes de Darboux supérieures, on a

$$\int_a^b f = \inf\left\{U_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\} \geq 0$$

et puisque 0 est un majorant des sommes de Darboux inférieures, on a

$$\int_a^b f = \sup\left\{L_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\} \leq 0.$$

Donc $\displaystyle\int_a^b f = 0$. ∎

Corollaire 9.55. *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables telles que $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ soit négligeable alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.*

Démonstration. Comme f et g sont intégrables, il vient que $f-g$ est intégrable et vérifie

$$\begin{aligned}\int_a^b f - \int_a^b g &= \int_a^b (f-g) \\ &= 0 \text{ car } [a,b] \setminus (f-g)^{-1}(\{0\}) \text{ est négligeable.}\end{aligned}$$

∎

Remarque 9.56. Dans les deux résultats précédents, il est important que les fonctions considérées soient intégrables. En effet, si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon et si $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par 0 alors $[a,b] \setminus (f-g)^{-1}(\{0\})$ est négligeable et g est intégrable mais f n'est pas intégrable.
Il est néanmoins possible d'affaiblir les hypothèses lorsque l'ensemble est seulement fini (et non pas négligeable), comme on le montre ci-dessous.

Théorème 9.57. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\})$ soit fini alors f est intégrable et $\int_a^b f = 0$.*

Démonstration. Notons d'abord que f est bornée.
De plus, l'ensemble $\{x \in [a,b] : f \text{ n'est pas continue en } x\} = [a,b] \setminus f^{-1}(\{0\})$ est fini donc négligeable.
Ainsi f est intégrable d'après le critère de Lebesgue 9.33.
On déduit du Théorème 9.54 que $\int_a^b f = 0$. ∎

Corollaire 9.58. *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est intégrable et $\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ soit fini alors g est intégrable et $\int_a^b f = \int_a^b g$.*

Démonstration. D'après le Théorème 9.57, $g - f$ est intégrable.
Donc $g = f + (g - f)$ est intégrable et

$$\int_a^b g = \int_a^b (f + (g - f)) = \int_a^b f + \int_a^b (g - f) = \int_a^b f + 0.$$

∎

TODO : *Ajouter en exercice : démonstrations des deux résultats précédents "à la main" (voir beamer de P7)*

9.12 Sommes de Riemann

Définition 9.59. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction.
Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$.
Pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, soit $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ (*on dit que P est une subdivision marquée de $[a,b]$*).
Alors

$$S_P^*(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_k^*)$$

est **une** *somme de Riemman* selon P.

Théorème 9.60. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.*
Soit $\left(S_{P_n}^*(f)\right)_n$ une suite de sommes de Riemann vérifiant $\lim_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0$.
Si f est intégrable alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_{P_n}^*(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{P_n}(f) \le S_{P_n}^*(f) \le U_{P_n}(f)$.
On déduit de la Proposition 9.10, que $\lim_{n\to+\infty} L_{P_n} = \lim_{n\to+\infty} U_{P_n} = \int_a^b f(x)dx$.
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} S_{P_n}^*(f) = \int_a^b f$. ∎

Corollaire 9.61. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

9.13 Intégrales impropres

TODO : *LCT/BCT/...comparaison série–intégrale*

9.14 Exercices

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

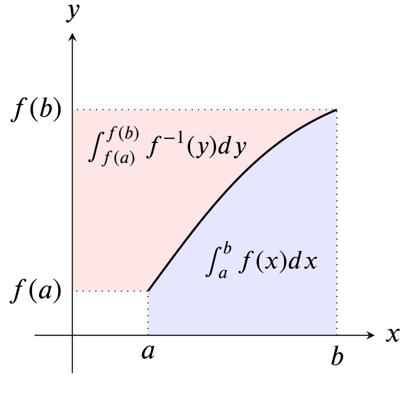
1. Montrer que si f est non-constante alors il existe une subdivision P de $[0,1]$ telle que $L_P(f) \neq U_P(f)$.
2. Donner une CNS sur f pour qu'il existe une subdivision P de $[0,1]$ telle que $L_P(f) = U_P(f)$.

Exercice 2.

1. En utilisant seulement la définition de l'intégrale, montrer que
$$\forall a \geq 0, \int_0^a x^3 dx = \frac{a^4}{4}.$$
2. On considère $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) \coloneqq x^p$ où $p \in \mathbb{N}$ et où $0 < a < b$.
   (a) Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ l'unique subdivision de $[a,b]$ en n intervalles dont les rapports des extrémités $\alpha \coloneqq \frac{x_k}{x_{k-1}}$ sont égaux.
   Montrer que
   $$U_P(f) = \left(b^{p+1} - a^{p+1}\right) \frac{\alpha^p}{1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^p}$$
   et en déduire une formule similaire pour $L_P(f)$.
   (b) Conclure que $\displaystyle\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$.

Exercice 3.

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = [f(a), f(b)]$.
   (b) Montrer que $\tilde{f} : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ définie par $\tilde{f}(x) \coloneqq f(x)$ est bijective.
   On notera abusivement f^{-1} pour la réciproque de $\tilde{f}$.
   (c) Justifier que f et f^{-1} sont intégrables.
   (d) Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$.
      i. Montrer que $Q \coloneqq \{f(a) = f(x_0) < f(x_1) < \cdots < f(x_n) = f(b)\}$ est une subdivision de $[f(a), f(b)]$.
      ii. Montrer que $L_{f^{-1}}(Q) + U_f(P) = bf(b) - af(a)$.
   (e) En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = bf(b) - af(a)$.
   La figure ci-dessous illustre la formule obtenue : l'aire de la partie colorée est la différence des aires des deux rectangles.



2. *Application.* Calculer la valeur de $\displaystyle\int_a^b \sqrt[p]{x}dx$ où $0 \leq a \leq b$.

3. *Application (inégalité de Young)*. Soit $f : [0, c] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante telle que $f(0) = 0$. D'après les questions 1.(a) et 1.(b), on a que $\operatorname{Im}(f) = [0, f(c)]$ et que $f : [0, c] \to [0, f(c)]$ est bijective.
   Montrer que $\forall \alpha \in [0, c],\ \forall \beta \in [0, f(c)]\,,\ \alpha\beta \leq \int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^\beta f^{-1}(y)dy.$

Exercice 4. On considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $x = \frac{1}{n}$ et par $f(x) = 1$ sinon.

1. Déterminer $\overline{\int_0^1} f(x)dx$.
2. (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision P de $[0, 1]$ telle que $L_P(f) > 1 - \varepsilon$.
   Indice : on pourra considérer une subdivision dont le premier segment contient $\left\{ \frac{1}{k} : k \geq n \right\}$, *pour un certain* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
   (b) En déduire la valeur de $\underline{\int_0^1} f(x)dx$.
3. La fonction f est-elle intégrable ? Le cas échéant, quelle est la valeur de $\int_0^1 f(x)dx$?

Exercice 5 (Fonction de Dirichlet)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $f_{|[0,1]}$ n'est pas intégrable en utilisant la définition d'intégrabilité.
2. Montrer que $f_{|[0,1]}$ n'est pas intégrable en utilisant le critère de Lebesgue.
   Indice : montrer que f est nulle part continue.

Exercice 6 (Fonction de Thomae)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{N}_{>0},\ \operatorname{pgcd}(p, q) = 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Montrer que $f_{|[0,1]}$ est intégrable en utilisant la définition d'intégrabilité.
2. (a) Montrer que f est discontinue aux points rationnels et continue aux points irrationnels.
   (b) Montrer que $f_{|[0,1]}$ est intégrable en utilisant le critère de Lebesgue.

Exercice 7. L'objectif de cet exercice est de démontrer *à la main* (directement depuis la définition), certaines formules de changement de variable et d'en fournir deux applications.

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$,
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x - c)dx.$$
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que pour tout $c > 0$,
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{c} \int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} f(cx)dx.$$
3. *Application.* Montrer que $\int_1^a \frac{1}{x}dx + \int_1^b \frac{1}{x}dx = \int_1^{ab} \frac{1}{x}dx.$

4. *Application.* Soit $a \geq 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Cette question a pour objectif de donner une nouvelle méthode pour calculer $\displaystyle\int_0^a x^p dx$.

   Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $c_k \coloneqq \displaystyle\int_0^1 x^k dx$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^a x^p dx = a^{p+1} c_p$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{2a} x^p dx = \int_{-a}^{a} (x+a)^p dx$.
   (c) En déduire que $2^{p+1} c_p a^{p+1} = 2a^{p+1} \sum_{k \text{ pair}} \binom{p}{k} c_k$.
   (d) En déduire que $c_p = \frac{1}{p+1}$.
   (e) Conclure.

Exercice 8. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^3} \frac{1}{(\ln(t))^2} dt$.

Exercice 9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)\cos(x)dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin(x)dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f(x)^2 dx.$$

Exercice 10.

1. (a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.
   Montrer que si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
   (b) Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables.
   Montrer que si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

2. Construire une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable et positive telle qu'il existe $x \in [a,b]$ vérifiant $f(x) > 0$ mais $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$.

3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On suppose qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une subdivision P de $[a,b]$ telle que $L_P(f) > 0$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$.

4. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   (a) Montrer que si $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue alors $f \equiv 0$.
   (b) Montrer que si $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $g(a) = g(b) = 0$ alors $f \equiv 0$.

Exercice 11. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.
On définit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ par $F(x) := \int_a^x f(s)ds$.

1. Montrer que F est continue.
2. Montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $\int_a^x f(s)ds = \int_x^b f(s)ds$.
3. Dans la question précédente, peut-on toujours prendre $x \in]a,b[$?

Exercice 12. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(s)ds = \ell$.

Exercice 13. Les fonctions suivantes sont-elles intégrables ? Le cas échéant, déterminer la valeur de l'intégrale.

1. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 42 & \text{sinon} \end{cases}$.
2. $g : [0,10] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \lfloor x \rfloor$.
3. $h : [0,5\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \lfloor \sin(x) \rfloor$.
4. $i : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $i(x) = x + \lfloor x \rfloor$.
5. $j : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $j(x) = \begin{cases} x + \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 14 (Version intégrale du théorème des accroissements finis)**.**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive et intégrable, où $a < b$.

1. Montrer qu'il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.
2. Le résultat est-il toujours valide si g change de signe ?

Exercice 15. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et déterminer leurs dérivées.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^{x^3} \sin^2(t)dt$.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \int_x^0 \frac{1}{1+t^2+\sin^2(t)}dt$.
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \int_0^{42} \frac{x}{1+t^2+\sin^2(t)}dt$.

Exercice 16. Montrer que les fonctions suivantes sont constantes.

1. $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$
2. $g : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \int_{-\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Exercice 17. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $F(x) \coloneqq \displaystyle\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$.

1. Montrer que F est bien définie.
2. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 18.

1. Déterminer une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\displaystyle\int_0^x tg(t)dt = x + x^2$.
2. Déterminer une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\displaystyle\int_0^{x^2} th(t)dt = x + x^2$.

Exercice 19. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_{ax}^{bx}\left(\int_{ct}^{dt} e^{-s^2}ds\right)dt}{\cos(x)-1}$.

Exercice 20. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.
Montrer qu'il existe un unique $x \in [0,1]$ tel que $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = 2x - 1$.

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(x) \coloneqq f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
Montrer que si g est décroissante alors $f \equiv 0$.

Exercice 22 (Lemme de Grönwall)**.**
Soient $f, g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ deux fonctions continues et $K > 0$.
On suppose que $\forall x \geq 0,\ f(x) \leq K + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)dt$. Montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) \leq Ke^{\int_0^x g(t)dt}$.

Exercice 23.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)dx$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx$.

Exercice 24. Soit $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue où $a > 0$.
On suppose que $\forall x \in [0,a],\ f(x) \neq -1$ et $f(x)f(a-x) = 1$.
Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}dx$.

Exercice 25. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x e^t \ln(t)dt}{e^x \ln(x)} = 1$.

Exercice 26. Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$.
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 27.

1. *Intégrales de Wallis.*

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n \coloneqq \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$

   (b) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (c) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

   (e) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

   (f) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer W_nW_{n+1} en fonction de n et en déduire que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

   (g) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$ et que $\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

2. *Application : formule de Stirling.*

   Pour $n \geq 1$, on définit $u_n \coloneqq \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

   (a) Montrer que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.

   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge.

   (c) En déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n\geq 1}$ converge.

   (d) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}n^ne^{-n}$ (*théorème de de Moivre*).

   (e) Utiliser les résultats sur les intégrales de Wallis pour déterminer C.
   L'équivalent de $n!$ obtenu s'appelle la formule de Stirling.

***TODO :** il existe ensemble négligeable non dénombrable*

10 Comparaison locale de fonctions

10.1 Propriété vérifiée sur un voisinage

Définition 10.1. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D.
On dit que f vérifie une propriété au voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f vérifie cette propriété sur $D \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.

Exemple 10.2. La fonction cos est strictement positive au voisinage de 0 car $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\cos(x) > 0$.

Exemple 10.3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.
Alors "f ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a" signifie que

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\},\ f(x) \neq 0.$$

Par exemple, la fonction sin ne s'annule pas au voisinage de 0 privé de 0.

Définition 10.4. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ non-majorée (resp. non-minorée).
On dit que f vérifie une propriété au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie cette propriété sur $D \cap [M, +\infty[$ (resp. $D \cap]-\infty, M]$).

Exemple 10.5. La fonction ln est positive au voisinage de $+\infty$ car $\forall x \in [1, +\infty[$, $\ln(x) \geq 0$.

10.2 Règle de L'Hôpital

Définition 10.6. Étant donné un intervalle I, on note $\overline{I}$ l'ensemble obtenu en ajoutant à I ses bords (éventuellement $\pm\infty$).

Lemme 10.7. *Soient $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle et $a \in \overline{I}$ (possiblement $\pm\infty$).
On suppose que g est dérivable au voisinage de a sauf peut-être en a.
Si g' ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a.*

Démonstration. Montrons la contraposée lorsque $a \in \mathbb{R}$ (il faut adapter les ensembles ci-dessous lorsque $a = \pm\infty$).
On suppose que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap (I \setminus \{a\}),\ g(c) = 0$$

et on veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap \mathrm{Der}_g,\ g'(c) = 0.$$

où Deg_g désigne l'ensemble des points de I où g est dérivable.

Soit $\varepsilon > 0$.
Sans perte de généralité, on peut supposer que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap (I \setminus \{a\}) \subset \mathrm{Der}_g$.
Par hypothèse[31], il existe $c_1, c_2 \in I$ vérifiant $a < c_1 < c_2 < a+\varepsilon$ ou $a-\varepsilon < c_2 < c_1 < a$ tels que $g(c_1) = g(c_2) = 0$.
Alors, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]c_1, c_2[$ tel que $g'(c) = 0$. ■

[31] Quitte à appliquer l'hypothèse trois fois, d'après le principe des tiroirs on peut supposer que c_1 et c_2 sont soit tous les deux plus grands que a soit tous les deux plus petits que a.

Théorème 10.8 (Règle de L'Hôpital)**.**
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I.
Soient $a \in \overline{I}$ (possiblement $+\infty$ ou $-\infty$) et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Si

1. *f et g sont dérivables au voisinage de a sauf peut-être en a,*
2. *g' ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a,*
3. *$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$,*
4. *$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$,*

alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Remarque 10.9. D'après le lemme précédent, $\frac{f}{g}$ est bien définie au voisinage de a privé de a.

Remarque 10.10. Le théorème est valable pour une limite en un point, une limite en $+\infty$, une limite en $-\infty$ mais aussi pour une limite à droite ou à gauche en un point (il suffit de restreindre f).

Démonstration de la règle de L'Hôpital lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.
Quitte à réaliser un changement de variable et à prolonger f et g, on peut supposer que $a \in I$ et $f(a) = g(a) = 0$.
Il existe $\varepsilon > 0$ tel que f et g sont dérivables sur $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap(I \setminus \{a\})$ et

$$\forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap(I \setminus \{a\}),\ g(x) \neq 0 \text{ et } g'(x) \neq 0.$$

Soit $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap(I \setminus \{a\})$.
D'après le Corollaire 5.12, il existe $c \in]a, x[$ si $a < x$ ou $c \in]x, a[$ si $a > x$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{c\to a} \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \ell$. ■

Démonstration de la règle de L'Hôpital lorsque $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$. ***TODO*** ■

Exemple 10.11 (Contre-exemple si l'hypothèse 3 n'est pas vérifiée)**.**
Considérons $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 2x + 1$.
Alors f et g vérifient toutes les hypothèses du théorème de L'Hôpital pour la limite en 1 sauf la troisième.
On a $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{1}{2}$ alors que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2}{3}$.

Exemple 10.12 (Contre-exemple si l'hypothèse 4 n'est pas vérifiée)**.**
Considérons $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x + \sin(x)$ et $g(x) = x$.
Alors f et g vérifient toutes les hypothèses du théorème de L'Hôpital pour la limite en $+\infty$ sauf la quatrième. En effet $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\cos(x)}{1}$ n'existe pas.
Néanmoins $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

L'exemple précédent montre que même lorsque les trois premières hypothèses du théorème de L'Hôpital sont vérifiées :

- Si $\lim \frac{f'}{g'}$ n'existe pas, on ne peut pas en déduire que $\lim \frac{f}{g}$ n'existe pas.
- Si $\lim \frac{f}{g} = \ell$, on ne peut pas en déduire que $\lim \frac{f'}{g'} = \ell$.

Exemple 10.13. ***TODO :*** *Faire deux ou trois exemples parmi la liste suivante, et les autres en exercice*

1. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (encore !)
2. *Calculer* $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1+\cos(x)}{x-\pi}$ (avec et sans L'Hôpital !)
3. *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x)$
4. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}$
5. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2+x}$
6. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$
7. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x-\sin(x)}$
8. *Calculer* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$
9. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur un intervalle.*
   Montrer que si f *est de classe* C^2 *au voisinage de* a *alors*
$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$
10. *Calculer* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
11. *Calculer* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^{1/2}+x^{-1/2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}$
12. *Trouver un polynôme* P *tel que* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{P(x)}{e^x - e\cdot x} = \frac{1}{e}$

10.3 Notations de Landau

Définition 10.14. Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D.
On dit que f et g sont *équivalentes en* a, noté $f \underset{a}{\sim} g$ (*notation de Landau*), s'il existe une fonction $\lambda : V \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle V centré en a telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = 1 \\ \forall x \in V \cap D,\ f(x) = \lambda(x)g(x) \end{cases}$$

Définition 10.15. Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ non-majorée (resp. non-minorée) et $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$).
On dit que f et g sont *équivalentes en* a, noté $f \underset{a}{\sim} g$ (*notation de Landau*), s'il existe une fonction $\lambda : V \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $V \subset \mathbb{R}$ non-majoré (resp. non-minoré) tel que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = 1 \\ \forall x \in V \cap D,\ f(x) = \lambda(x)g(x) \end{cases}$$

Proposition 10.16. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ avec $f(a) = g(a)$ si $a \in D$.*
Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Démonstration lorsque $a \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ Supposons que $f \underset{a}{\sim} g$ alors il existe une fonction $\lambda : V \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de a telle que $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = 1$ et $\forall x \in D \cap V,\ f(x) = \lambda(x)g(x)$.
Puisque g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = 1$.
$\Leftarrow$ Supposons que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Puisque g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in D \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\},\ g(x) \neq 0$.
Définissons $\lambda : [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \to \mathbb{R}$ par $\lambda(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ si $x \in D \setminus \{a\}$ et $\lambda(x) = 1$ sinon.
Alors $\forall x \in D \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon],\ f(x) = \lambda(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = 1$. Donc $f \underset{a}{\sim} g$. ■

Exemple 10.17. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et que le dénominateur ne s'annule pas en dehors de 0, on a

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Proposition 10.18. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow f \underset{a}{\sim} \ell$.*

Démonstration. Puisque $\ell \neq 0$, on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\ell} = 1 \Leftrightarrow f \underset{a}{\sim} \ell.$$

■

Remarque 10.19. Attention, la proposition précédente est fausse lorsque $\ell = 0$ comme on peut s'en convaincre en considérant la fonction sin au voisinage de 0.
En effet, supposons par l'absurde que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} 0$ alors il existe $\lambda : V \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle V centré en 0 tel que $\forall x \in V,\ \sin(x) = \lambda(x) \cdot 0 = 0$.
D'où une contradiction car sin n'est pas nulle au voisinage de 0.

Néanmoins, on a le résultat suivant.

Proposition 10.20. *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.*

Démonstration. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \lambda(x)g(x) = 1 \cdot \ell = \ell$. ■

Proposition 10.21. *L'équivalence de fonctions en $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) est une relation d'équivalences, c'est-à-dire :*

- *Elle est réflexive : $f \underset{a}{\sim} f$*
- *Elle est symétrique : $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow g \underset{a}{\sim} f$*
- *Elle est transitive : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$*

Démonstration. Nous démontrons le résultat lorsque $a \in \mathbb{R}$, la démonstration est similaire lorsque $a = \pm\infty$.

- *Réfléxivité.* Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D.
  Définissons $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\lambda(x) = 1$ alors $\forall x \in D,\ f(x) = f(x)\lambda(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = 1$.
  Donc $f \underset{a}{\sim} f$.
- *Symétrie.* Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D tels que $f \underset{a}{\sim} g$.
  Alors il existe $\lambda : V \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de a telle que $\forall x \in V \cap D,\ f(x) = \lambda(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = 1$.
  Par définition de la limite, on sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in V,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - 1| \leq \frac{1}{2} \implies f(x) \geq \frac{1}{2}$.
  Donc, quitte à réduire V, on peut supposer que $\forall x \in V,\ \lambda(x) \neq 0$.
  Alors, $\forall x \in V \cap D,\ g(x) = \frac{1}{\lambda(x)} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\lambda(x)} = 1$.
  Donc $g \underset{a}{\sim} f$.
- *Transitivité.* Soient $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D tels que $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$.
  Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 : V \to \mathbb{R}$ définies au voisinage de a telles que

  $$\begin{cases} \forall x \in V \cap D,\ f(x) = \lambda_1(x)g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} \lambda_1(x) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall x \in V \cap D,\ g(x) = \lambda_2(x)h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} \lambda_2(x) = 1 \end{cases}$$

  Alors, on a $\forall x \in V \cap D,\ f(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \lambda_1(x)\lambda_2(x) = 1$.
  Donc $f \underset{a}{\sim} h$.

■

Proposition 10.22 (Opérations sur les équivalents).

1. *Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.*
2. *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a et $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.*
3. *Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$, $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ et f_2 ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.*

Démonstration. ***TODO*** ■

Proposition 10.23 (Changement de variable/composition à droite).
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $f \underset{b}{\sim} g$ alors $f \circ u \underset{a}{\sim} g \circ u$.

Démonstration. $f(x) = \lambda(x)g(x) \implies f(u(x)) = \lambda(u(x))g(u(x))$ et $\lim\limits_{x\to a} \lambda(u(x)) = \lim\limits_{x\to b} \lambda(x) = 1$. ■

Remarque 10.24. L'équivalence de fonctions n'est pas stable par addition, comme le montre l'exemple suivant :

$$x \underset{+\infty}{\sim} x + 1 \text{ et } -x \underset{+\infty}{\sim} -x \text{ mais } x + (-x) \underset{+\infty}{\not\sim} (x + 1) + (-x).$$

Remarque 10.25. L'équivalence de fonctions n'est pas stable par composition à gauche, comme le montre l'exemple suivant :

$$x \underset{+\infty}{\sim} x + 1 \text{ mais } e^x \underset{+\infty}{\not\sim} e^{x+1}.$$

Remarque 10.26. L'équivalence de fonctions n'est pas stable par dérivation, comme le montre l'exemple suivant.
Posons $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 1$ au voisinage de 0 alors $f \underset{0}{\sim} g$ mais $f' \underset{0}{\nsim} g'$.

Définition 10.27. Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D.
On dit que f est *négligeable* devant g en a, noté $f \underset{a}{=} o(g)$ (*notation de Landau*) ou $f \underset{a}{\ll} g$ (*notation de Hardy*), s'il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle V centré en a telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \\ \forall x \in V \cap D,\ f(x) = \varepsilon(x)g(x) \end{cases}$$

En utilisant des quantificateurs, cela s'écrit :

$$f \underset{a}{=} o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap D,\ |f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|$$

Définition 10.28. Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ non-majorée (resp. non-minorée) et $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$).
On dit que f est négligeable devant g en a, noté $f \underset{a}{=} o(g)$ (*notation de Landau*) ou $f \underset{a}{\ll} g$ (*notation de Hardy*), s'il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $V \subset \mathbb{R}$ non-majorée (resp. non-minorée) telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \\ \forall x \in V \cap D,\ f(x) = \varepsilon(x)g(x) \end{cases}$$

En utilisant des quantificateurs, cela s'écrit :

$$f \underset{+\infty}{=} o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [M, +\infty[\cap D,\ |f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|$$

$$f \underset{-\infty}{=} o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-\infty, m] \cap D,\ |f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|$$

Proposition 10.29. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ avec $f(a) = 0$ si $a \in D$.*
Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $f \underset{a}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Démonstration lorsque $a \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ Supposons que $f \underset{a}{=} o(g)$ alors il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de a telle que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et $\forall x \in D \cap V,\ f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.
Puisque g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
Puisque g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in D \cap [a-\eta, a+\eta] \setminus \{a\},\ g(x) \neq 0$.
Définissons $\varepsilon : [a-\eta, a+\eta] \to \mathbb{R}$ par $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ si $x \in D \setminus \{a\}$ et $\varepsilon(x) = 0$ sinon.
Alors $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap D,\ f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Donc $f \underset{a}{=} o(g)$. ∎

Exemple 10.30.
- $x^m \underset{x\to 0}{=} o(x^n) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^{m-n} = 0 \Leftrightarrow m > n$
- $x^m \underset{x\to+\infty}{=} o(x^n) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^{m-n} = 0 \Leftrightarrow m < n$

Exemple 10.31. Montrons que $x - \arctan(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.
Les fonctions $f(x) = x - \arctan(x)$ et $g(x) = x^2$ sont bien définies et deux fois dérivables au voisinage de 0.
De plus $g''(x) = 2$ ne s'annule pas et $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} g'(x) = 0$.
Puisque $\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x^2)^2} = 0$, on déduit du théorème de L'Hôpital que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

et donc que $x - \arctan(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.

Proposition 10.32. *1. Si $f = \underset{a}{o}(g)$ et $g = \underset{a}{o}(h)$ alors $f = \underset{a}{o}(h)$.*
2. Si $f_1 = \underset{a}{o}(g)$ et $f_2 = \underset{a}{o}(g)$ alors $f_1 + f_2 = \underset{a}{o}(g)$.
3. Si $f_1 = \underset{a}{o}(g_1)$ et $f_2 = \underset{a}{o}(g_2)$ alors $f_1 f_2 = \underset{a}{o}(g_1 g_2)$.

Démonstration.

1. Supposons que $f = \underset{a}{o}(g)$ et $g = \underset{a}{o}(h)$ alors il existe ε_1 et ε_2 définies au voisinage de a telles que
$$\begin{cases} f(x) = \varepsilon_1(x) g(x) \\ \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = \varepsilon_2(x) h(x) \\ \lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0 \end{cases}.$$
Alors $f(x) = \varepsilon_1(x) g(x) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) h(x)$ et $\lim_{x\to a} \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) = 0$.
Donc $f = \underset{a}{o}(h)$.

2. Supposons que $f_1 = \underset{a}{o}(g)$ et $f_2 = \underset{a}{o}(g)$ alors il existe ε_1 et ε_2 définies au voisinage de a telles que
$$\begin{cases} f_1(x) = \varepsilon_1(x) g(x) \\ \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f_2(x) = \varepsilon_2(x) g(x) \\ \lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0 \end{cases}.$$
Alors $f_1(x) + f_2(x) = (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) g(x)$ et $\lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) = 0$.
Donc $f_1 + f_2 = \underset{a}{o}(g)$.

3. Supposons que $f_1 = \underset{a}{o}(g_1)$ et $f_2 = \underset{a}{o}(g_2)$ alors il existe ε_1 et ε_2 définies au voisinage de a telles que
$$\begin{cases} f_1(x) = \varepsilon_1(x) g_1(x) \\ \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f_2(x) = \varepsilon_2(x) g_2(x) \\ \lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0 \end{cases}.$$
Alors $f_1(x) f_2(x) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) g_1(x) g_2(x)$ et $\lim_{x\to a} \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) = 0$.
Donc $f_1 f_2 = \underset{a}{o}(g_1 g_2)$.

■

Remarque 10.33. On ne peut pas sommer dans le petit o, i.e. on n'a pas que si $f = \underset{a}{o}(g_1)$ et $f = \underset{a}{o}(g_2)$ alors $f = \underset{a}{o}(g_1 + g_2)$.
En effet, $x^3 = \underset{x\to 0}{o}(x^3 - x^2)$ et $x^3 = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ mais $x^3 \neq \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

TODO : *Mettre en exo :*
Vrai ou Faux ? Justifier.

1. *Si* $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$ *alors* $f(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.
2. *Si* $f(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ *alors* $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
3. *Si* $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$ *alors* $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(42x)$.
4. *Si* $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$ *et* $g(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ *alors* $f(x)+g(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
5. *Si* $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$ *et* $g(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ *alors* $f(x)+g(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.

Remarque 10.34. On écrit $f(x) = g(x) + \underset{a}{o}(h(x))$ pour signifier qu'il existe une fonction r telle que $r = \underset{a}{o}(h)$ et $f(x) = g(x) + r(x)$.
Autrement dit, $f(x) = g(x) + \underset{a}{o}(h(x))$ signifie qu'il existe une fonction ε telle que

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + \varepsilon(x)h(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

TODO : *Exercice :*
Si $f(x) = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ *et* $g(x) = 2x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ *alors :*

1. $f(x) + g(x) = 1 + 3x + \underset{x\to 0}{o}(x)$
2. $f(x)g(x) = 2x + 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$

Proposition 10.35. $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f = g + \underset{a}{o}(g)$.

Démonstration. $\Rightarrow$ Supposons que $f \underset{a}{\sim} g$ alors il existe $\lambda : V \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de a telle que $f = \lambda g$ et $\lim\limits_{a} \lambda = 1$.
Définissons $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ par $\varepsilon = \lambda - 1$ alors $f = g\lambda = g + g\varepsilon$ où $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$.
D'où $f = g + \underset{a}{o}(g)$.

$\Leftarrow$ Supposons que $f = g + \underset{a}{o}(g)$ alors il existe $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de a telle que $f = g + \varepsilon g$ et $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$.
Définissons $\lambda : V \to \mathbb{R}$ par $\lambda = 1 + \varepsilon$ alors $f = \lambda g$ où $\lim\limits_{a} \lambda = 1$.
D'où $f \underset{a}{\sim} g$. ∎

Proposition 10.36. *Soient* $\alpha, \beta, \gamma > 0$ *alors*

$$(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{\ll} x^\beta \underset{x\to+\infty}{\ll} e^{\gamma x}.$$

10.4 Développements limités

10.4.1 Définition et premières propriétés

Définition 10.37. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un *développement limité d'ordre n en a*, noté $DL_n(a)$, s'il existe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in$

$\mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{\underset{x\to a}{o}((x-a)^n)}_{\text{Reste}}$$

ou, de façon équivalente via le changement de variable $h = x - a$, tels que

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots \alpha_n h^n + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

Remarque 10.38. On remarque aisément que si f admet un développement limité en a alors $\alpha_0 = f(a)$.

Proposition 10.39 (Unicité du DL)**.** *Si f admet un développement limité d'ordre n en a alors il est unique.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q de degrés au plus n tels que

$$f(a+h) = P(h) + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right) \quad \text{et} \quad f(a+h) = Q(h) + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right).$$

Alors $P(h)-Q(h) = \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$ et $P-Q$ est un polynôme de degré au plus n, donc $P-Q=0$. ■

Remarque 10.40. La partie régulière du $DL_n(a)$ d'une fonction, si elle existe, est la meilleure approximation de f au voisinage de a par un polynôme de degré au plus n.

Exemple 10.41. Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + 17x + 42x^2 + 64x^3$ alors :

1. f admet le $DL_2(0)$ suivant : $f(x) = 1 + 17x + 42x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.
2. f admet un $DL_2(1)$ suivant : $f(x) = 124 + 293(x-1) + 234(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right)$.

   En effet,

$$\begin{aligned} f(1+h) &= 1 + 17(1+h) + 42(1+h)^2 + 64(1+h)^3 \\ &= 1 + 17(1+h) + 42(1+2h+h^2) + 64(1+3h+3h^2+h^3) \\ &= 124 + 293h + 234h^2 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right) \end{aligned}$$

Exemple 10.42. Considérons $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$ alors f admet le $DL_n(0)$ suivant :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right).$$

En effet,

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = 1 + x + \cdots + x^n + x^n \frac{x}{1-x}.$$

TODO : *Exercice à ajouter :*
En utilisant le formulaire à la fin de la feuille de TD, calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{\arctan(x) - x}$$

Proposition 10.43. *f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a.*

Démonstration. f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si $f(x) = f(a) + \underset{x\to a}{o}(1)$. ■

Proposition 10.44. *f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a.*
Dans ce cas, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$,
ou, de façon équivalente, $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{h\to 0}{o}(h)$.

Démonstration. f admet un $DL_1(a)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(a+h) = f(a) + \alpha h + \underset{h\to 0}{o}(h)$,
i.e. si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \alpha$. ■

Remarque 10.45. Attention ! Les deux résultats précédents ne se généralisent pas pour $n \geq 2$:
- Une fonction peut admettre un $DL_2(a)$ sans être deux fois dérivable en a (cf exemple ci-dessous).
- Néanmoins, la réciproque se généralise : on verra plus loin (théorème de Taylor–Young) que si une fonction est n fois dérivable en a alors elle admet un $DL_n(a)$.

Exemple 10.46. Considerons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Alors $f(x) = 0 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ mais f n'est pas deux fois dérivable en 0.

10.4.2 Opérations sur les développements limités

Proposition 10.47 (Combinaison linéaire et produit)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I, $a \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
Si $f(x) = P(x-a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$ et $g(x) = Q(x-a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$, où P et Q sont deux polynômes de degrés au plus n, alors
1. *$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda P(x-a) + \mu Q(x-a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$,*
2. *$f(x)g(x) = S(x-a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$ où S est la troncation de PQ aux termes de degrés $\leq n$.*

Démonstration. ***TODO*** ■

Exemple 10.48. On souhaite déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \sin(x)\cos(x)$:

$$\begin{aligned}
\sin(x)\cos(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \\
&= x - \frac{2}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Proposition 10.49 (Composition)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ définies sur deux intervalles I et J telles que $\mathrm{Im}(f) \subset J$ et $a \in I$.*
Si $f(x) = P(x-a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$ et $g(x) = Q(x-f(a)) + \underset{x\to a}{o}\left((x-f(a))^n\right)$ alors

$$g(f(x)) = S(x-a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

où S est la troncation de $Q \circ (P - P(0))$ aux termes de degrés $\leq n$.

Démonstration. ***TODO*** ■

Exemple 10.50. On souhaite déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \cos(\sin(x))$:

$$\begin{aligned}\cos(\sin(x)) &= \cos\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)^2 + \underset{x\to0}{o}\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)^3\right)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

Remarque 10.51 (Quotient)**.** La proposition précédente est utile pour calculer le développement limité d'un quotient.
En effet, soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$, alors

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(a)}\frac{1}{1 + \frac{f(x)-f(a)}{f(a)}} = \frac{1}{f(a)}g(\tilde{f}(x))$$

où $g(x) = \frac{1}{1+x}$ et $\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{f(a)} - 1$.

Exemple 10.52. On souhaite déterminer le $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{1+x^2}{\cos(x)}$:

$$\begin{aligned}\frac{1+x^2}{\cos(x)} &= \frac{1+x^2}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)} = \left(1+x^2\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + \underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)\right)\\ &= \left(1+x^2\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \underset{x\to0}{o}\left(x^4\right) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{24}x^4 + \underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)\end{aligned}$$

Proposition 10.53 (Primitivation)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I admettant le $DL_n(a)$ suivant :*

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ et

$$F(x) = F(a) + \alpha_0(x-a) + \frac{\alpha_1}{2}(x-a)^2 + \frac{\alpha_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Démonstration. Considérons la fonction $R : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$R(x) = F(x) - \left(F(a) + \alpha_0(x-a) + \frac{\alpha_1}{2}(x-a)^2 + \frac{\alpha_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n+1}(x-a)^{n+1}\right)$$

alors $R'(x) = f(x) - \left(\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n\right)$.
On sait que R et $\varphi : x \mapsto (x-a)^{n+1}$ sont dérivables au voisinage de a, que $\lim_{x\to a} R(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$, que $\varphi'(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a privé de a et que $\lim_{x\to a}\frac{R'(x)}{\varphi'(x)} = 0$ (car $R'(x) = \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$).
Donc, d'après le théorème de L'Hôpital, $\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$, i.e. $R(x) = \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$. ■

Remarque 10.54. On peut simplement retenir que si $f(x) = P(x-a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$ où P est un polynôme de degré $\leq n$ alors

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x P(t-a)dt + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Exemple 10.55. On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n-1}\right),$$

donc

$$-\ln(1-x) = \ln(1) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right).$$

Ainsi, on a

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right).$$

TODO : *Mettre en EXO :*
Déterminer le $DL_{2n+1}(0)$ de arctan.

Proposition 10.56 (Dérivation)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I admettant le $DL_{n+1}(a)$ suivant :*

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_{n+1}(x-a)^{n+1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

*Si f est dérivable et **si f' admet un** $DL_n(a)$ alors*

$$f'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + \cdots + (n+1)\alpha_{n+1}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition de primitivation à f'. ■

Remarque 10.57. On peut simplement retenir que si f admet un $DL_{n+1}(a)$ et que si f' admet un $DL_n(a)$ alors le développement limité de f' s'obtient en dérivant celui de f terme à terme. **Attention,** l'hypothèse que f' admet un $DL_n(a)$ est importante : il est possible que f admette un $DL_{n+1}(a)$ et que f soit dérivable mais que f' n'admette pas de $DL_n(a)$; voir l'Exercice ***TODO :*** *ref* .

10.4.3 Théorème de Taylor–Young

Théorème 10.58 (Théorème de Taylor–Young)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.*
Si f est n fois dérivable[32] *en a alors f admet un $DL_n(a)$ et*

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

ou, de façon équivalente,

$$f(a+h) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

Démonstration. On a déjà vu que l'énoncé était vrai pour $n = 0$ ou $n = 1$.
Supposons l'énoncé vrai pour un certain $n \geq 1$ et montrons le pour $n+1$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I qui est $n+1$ fois dérivable en $a \in I$.
Alors, puisque $n + 1 \geq 2$, f est dérivable au voisinage de a et f' est n fois dérivable en a.

[32] En particulier, il existe $\eta > 0$ tel que f est $n-1$ fois dérivable sur $[a-\eta, a+\eta] \cap I$.

Donc, par hypothèse de récurrence, $f'(x)=\frac{f'(a)}{0!}+\frac{f''(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(3)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n+\underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$.
D'après le théorème de primitivation, on obtient alors que

$$f(x)=\frac{f(a)}{0!}+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+\underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

■

TODO : *Mettre en exo :*

1. *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\exp$ admet un $DL_n(0)$ et que*
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right).$$
2. *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\cos$ admet un $DL_{2n+1}(0)$ et que*
$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right).$$
3. *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sin$ admet un $DL_{2n+2}(0)$ et que*
$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

TODO : *Taylor reste intégrale*

10.4.4 Développements limités usuels en 0

- $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{a(a-1)(a-2)...(a-(n-1))}{n!}x^n+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$
- $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$
- $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$
- $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$
- $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$
- $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$
- $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$
- $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$

- $\arcsin(x) = x + \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$
- $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{2\cdot 3} - \dfrac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \cdots - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$
- $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$

10.5 Exercices

Exercice 1. Donner un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(x)$
2. $f_2(x) = 1 - \cos(x)$
3. $f_3(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$
4. $f_4(x) = \tan(3x)$
5. $f_5(x) = \arctan(2x)$

Exercice 2. 1. (a) Donner un équivalent simple en $+\infty$ des fonctions suivantes :

i. $f_1(x) = 3x^4 - 2x^2 + \sqrt{x}$

ii. $f_2(x) = \dfrac{x^2 - 2\sin(x)}{2x^3 - x + 7}$

iii. $f_3(x) = \dfrac{1 - x\ln(x)}{(x+6)\sqrt{x^2 + \sin(x)}}$

iv. $f_4(x) = \sqrt{x^6 - 5x^3 + 1}$

v. $f_5(x) = \arctan\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

(b) En déduire la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes.

i. $\dfrac{f_5}{f_2}$

ii. $\dfrac{f_1^3 f_2^6}{f_4^2}$

iii. $f_1 - f_4$

iv. $f_3 + f_5$

v. $f_2 - f_5$

(c) Peut-on en déduire un équivalent de $4f_2 - f_5$?

2. Donner un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes, puis en déduire leur limite en 0.

(a) $f_1(x) = 3x^4 - 2x^2 + \sqrt{x}$

(b) $f_2(x) = \dfrac{(e^x + 1)\sin(x)}{\ln(1+x)}$

(c) $f_3(x) = x^2 - \arctan(x)$

(d) $f_4(x) = \dfrac{x - \arctan(x)}{x(1 - \cos(x))}$

Exercice 3. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux en justifiant.

1. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
   Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $e^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} e^{g(x)}$.

2. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
   Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(g(x))$.

Exercice 4. Soit f une fonction réelle admettant un développement limité d'ordre n en 0.

1. Montrer que si f est paire alors la partie régulière du développement limité de f en 0 ne contient que des puissances paires.

2. Montrer que si f est impaire alors la partie régulière du développement limité de f en 0 ne contient que des puissances impaires.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Donner le développement limité de f en a à l'ordre n pour :

1. $a = 0, n = 1$.
2. $a = 0, n = 2$.
3. $a = 0, n = 3$.
4. $a = 2, n = 3$.

Exercice 6. 1. Donner le développement limité de $f(x) = \ln(1+x) - \sin(x)$ en 0 à l'ordre 3.
2. Donner le développement limité de $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en 0 à l'ordre $2n$.
3. Donner le développement limité de $f(x) = \cos(3x)\sin(2x)$ en 0 à l'ordre 5.
4. (a) Donner le développement limité de $f(x) = e^x\cos(x)$ en 0 à l'ordre 3.

   (b) En déduire un équivalent simple en 0 de $g(x) = e^x \cos(x) - 1 - x$.
5. Donner le développement limité de $f(x) = \sqrt{2+x}$ en 0 à l'ordre 3.
6. Donner le développement limité de $f(x) = \frac{1}{2+x}$ en 0 à l'ordre 3.
7. Donner le développement limité de $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ en 0 à l'ordre 3.
8. (a) Donner le développement limité de $f(x) = e^{\cos(x)}$ en 0 à l'ordre 3.
   (b) En déduire un équivalent simple en 0 de $g(x) = e^{\cos(x)} - e$.
9. Donner le développement limité de $f(x) = \frac{x^5 \sin(x)}{\ln(1+x)}$ en 0 à l'ordre 5.
10. Donner le développement limité de $f(x) = \sin(1 + x)$ en 0 à l'ordre 3.

Pour les questions précédentes, chaque fois que c'est possible, en déduire le signe de la fonction et l'allure de sa courbe représentative au voisinage de 0 (*position par rapport à sa tangente*).

Exercice 7. Étudier la limite éventuelle de f en a pour :

1. $f(x) = \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2}$ et $a = 0$.
2. $f(x) = \dfrac{1 - x + \ln(x)}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$ et $a = 1$.

Exercice 8. Calculer les limites suivantes en utilisant des développements limités convenablement choisis :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\frac{x}{x+1}}}{x^2}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3}\right)^x$ où $a, b, c > 0$.

Exercice 9. En utilisant des développements limités, calculer un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \ln\left(2^x + 3^x - 5^x\right)$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(\arcsin x)^2}$

Exercice 10. Étudier l'allure de la courbe représentative de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ au voisinage de a pour :

1. $a = 0$.
2. $a = 1$.

Exercice 11. Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions suivantes au voisinage de l'origine :

$$f(x) = x\sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \arctan(x).$$

Exercice 12. 1. On considère $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.
   (a) Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote commune en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Quelle est la position relative de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote ?

2. On considère $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.
   (a) Montrer que la courbe représentative de g admet des asymptotes en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Quelle est la position relative de la courbe représentative de g par rapport à ces asymptotes ?

3. On considère $h(x) = (x + 2)e^{1/x}$.

(a) Montrer que la courbe représentative de h admet une asymptote en $+\infty$.
(b) Quelle est la position relative de la courbe représentative de h par rapport à cette asymptote ?

Exercice 13. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer le développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 6.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\left(\frac{2}{x^3}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f admet un développement limité en 0 à l'ordre 3 dont la partie régulière est nulle.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. Montrer que f' n'admet pas de développement limité en 0.
4. Que peut-on en conclure ?

11 Introduction aux équations différentielles ordinaires

11.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 11.1. Une *équation différentielle linéaire du premier ordre* (*EDL1*) est une équation de la forme
$$\alpha y' + \beta y = \gamma \tag{E}$$
où $\alpha, \beta, \gamma : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Une solution de (E) est une fonction $y : J \to \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle $J \subset I$ telle que
$$\forall x \in J,\ \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x).$$

- On dit que l'EDL1 (E) est normalisée si $\alpha \equiv 1$.
- On dit que l'EDL1 (E) est homogène si elle n'a pas de second membre, i.e. si $\gamma \equiv 0$.

Théorème 11.2 (Solutions d'une EDL1 homogène et normalisée)**.**
Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
Considérons l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ sur I,
$$\mathcal{S}_0 := \left\{ y : I \to \mathbb{R} \text{ dérivable} \mid \forall x \in I,\ y'(x) + a(x)y(x) = 0 \right\},$$
alors :
1. *$0 \in \mathcal{S}_0$ (en particulier $\mathcal{S}_0 \neq \varnothing$),*
2. *Si $y_1, y_2 \in \mathcal{S}_0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \mathcal{S}_0$,*
3. *Soit A une primitive de a alors*
$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-A(x)} \end{array} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque 11.3. On rappelle que a admet une primitive d'après le théorème fondamental de l'analyse.

Démonstration.

1. $\forall x \in I,\ 0 + a(x)0 = 0$.

2. Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{S}_0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $y := \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est dérivable par opérations élémentaires sur des fonctions dérivables et
$$y' + ay = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + a\lambda_1 y_1 + a\lambda_2 y_2 = \lambda_1(y_1' + ay_1) + \lambda_2(y_2' + ay_2) = 0.$$
Donc $y \in \mathcal{S}_0$.

3. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Définissons $z : I \to \mathbb{R}$ par $z(x) = y(x)e^{A(x)}$.
Alors $z'(x) = y'(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} = \left(y'(x) + a(x)y(x)\right) e^{A(x)}$.
D'où
$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_0 &\Leftrightarrow z' = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ z \equiv \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda e^{-A(x)} \end{aligned}$$

∎

Théorème 11.4 (Solution d'une EDL1 normalisée)**.**
Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I.
On dénote par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur I de l'EDL1

$$y' + ay = b \tag{E}$$

et par $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$y' + ay = 0. \tag{E_0}$$

Alors

1. $\mathcal{S} \neq \varnothing$
2. $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{S},\ y_1 - y_2 \in \mathcal{S}_0$
3. $\forall y \in \mathcal{S},\ \forall y_0 \in \mathcal{S}_0,\ y + y_0 \in \mathcal{S}$

Démonstration.

1. Soient A une primitive de a sur I et λ une primitive de be^A sur I.
   Définissons $y : I \to \mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, alors y est dérivable sur I et

   $$y'(x)+a(x)y(x) = \lambda'(x)e^{-A(x)}-\lambda(x)a(x)e^{-A(x)}+a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = \lambda'(x)e^{-A(x)} = b(x)e^{A(x)}e^{-A(x)} = b(x).$$

   Donc $y \in \mathcal{S}$, et ainsi $\mathcal{S} \neq \varnothing$.

2. Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$. Alors

   $$(y_1 - y_2)' + a(y_1 - y_2) = (y_1' + ay_1) - (y_2' + ay_2) = b - b = 0.$$

   Donc $y_1 - y_2 \in \mathcal{S}_0$.

3. Soient $y \in \mathcal{S}$ et $y_0 \in \mathcal{S}_0$ alors

   $$(y + y_0)' + a(y + y_0) = (y' + ay) + (y_0' + ay_0) = b + 0 = b.$$

   Donc $y + y_0 \in \mathcal{S}$. ■

Corollaire 11.5. *Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I.*
On dénote par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur I de l'EDL1

$$y' + ay = b \tag{E}$$

et par $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$y' + ay = 0. \tag{E_0}$$

Soit $y_p \in \mathcal{S}$ alors $\mathcal{S} = \left\{y_p + y_0 \ :\ y_0 \in \mathcal{S}_0\right\}$.

Démonstration.

$\subset$ Soit $y \in \mathcal{S}$ alors $y = y_p + y_0$ où $y_0 = y - y_p \in \mathcal{S}_0$.

$\supset$ Soit $y_0 \in \mathcal{S}_0$ alors $y_p + y_0 \in \mathcal{S}$. ■

Remarque 11.6. En pratique, on retiendra que

Solution générale de (E) = Solution particulière de (E) + Solution générale de (E_0).

Remarque 11.7. Comment déterminer une solution particulière en pratique ?

1. Recherche d'une solution évidente : on regarde l'équation droit dans les yeux.

2. Superposition des solutions : si y_{p_1} est une solution particulière de $y' + ay = b_1$ et si y_{p_2} est une solution particulière de $y' + ay = b_2$ alors $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ est une solution particulière de $y' + ay = b_1 + b_2$.

3. Méthode de la variation de la constante : on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$ où A est une primitive de a (i.e. on remplace la constante de la solution générale de l'équation homogène associée par une fonction).
En effet, on a vu qu'il existait une solution de cette forme lors de la démonstration du premier point du Théorème 11.4.

TODO : *exemples à détailler :*

1. $y' + xy = x$ *sur* $\mathbb{R}$

2. $y' + y = 2e^x + 4\sin(x) + 3\cos(x)$ *sur* $\mathbb{R}$

3. $y' + \dfrac{2-3x^2}{x^3}y = 1$ *sur* $]0, +\infty[$

Théorème 11.8 (Existence et unicité de la solution d'une EDL1 avec condition initiale)**.**
Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Alors l'EDL1 normalisée $y' + ay = b$ admet une unique solution sur I telle que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration. Puisque a est continue sur l'intervalle I, elle admet une primitive $A : I \to \mathbb{R}$. D'après les résultats des diapositives 7, 5 et 3, l'EDL1 $y' + ay = b$ admet une solution $y_p : I \to \mathbb{R}$ et alors la solution générale de cette équation sur I est donnée par

$$y(x) = y_p(x) + \lambda e^{-A(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Puis

$$y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow y_0 = y_p(x_0) + \lambda e^{-A(x_0)} \Leftrightarrow \lambda = \left(y_0 - y_p(x_0)\right) e^{A(x_0)}.$$

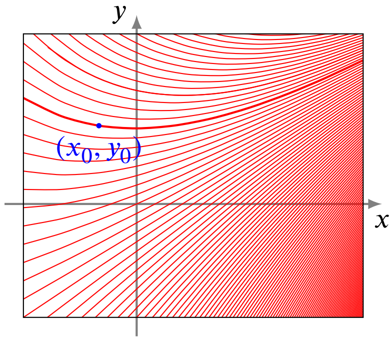
■

Remarque 11.9. On appelle *problème de Cauchy* la donnée d'une EDL1 avec une condition initiale :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Définition 11.10. Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I.
Le graphe d'une solution $y : I \to \mathbb{R}$ d'une EDL1 $y' + ay = b$ s'appelle *courbe intégrale*.

Remarque 11.11. L'existence et l'unicité d'une solution d'un problème de Cauchy peut se reformuler ainsi :
étant donnés $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique courbe intégrale passant par (x_0, y_0).
Autrement dit,
- $I \times \mathbb{R}$ est recouvert par les courbes intégrales de l'EDL1 considérée ;
- Deux courbes intégrales distinctes ne s'intersectent pas.



Courbes intégrales de l'EDL1 $y' + y = x$.

11.2 Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

Définition 11.12. Une *équation différentielle linéaire du deuxième ordre* $(EDL2)$ *à coefficients constants* est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = d(x) \tag{E}$$

où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Une solution de (E) est une fonction $y : J \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur un intervalle $J \subset I$ telle que

$$\forall x \in J,\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x).$$

- On dit que (E) est normalisée si $a = 1$.
- On dit que (E) est homogène si elle n'a pas de second membre, i.e. si $d \equiv 0$.

Théorème 11.13. *Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et $b, c \in \mathbb{R}$. On considère l'EDL2 homogène suivante*

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

On dénote l'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathcal{S}_0 \coloneqq \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ deux fois dérivable } : \forall x \in \mathbb{R},\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \right\},$$

alors :

1. $0 \in \mathcal{S}_0$ *(en particulier $\mathcal{S}_0 \neq \varnothing$),*
2. *Si $y_1, y_2 \in \mathcal{S}_0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \mathcal{S}_0$,*

La démonstration est similaire à celle du Théorème 11.2.

Théorème 11.14 (Solutions d'une EDL2 homogène à coefficients constants)**.**
Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et $b, c \in \mathbb{R}$. On considère l'EDL2 homogène suivante

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

On associe à (E_0) son équation caractéristique, donnée par

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{χ}$$

Notons Δ le discriminant de (χ) et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

1. *Si $\Delta > 0$ alors on note r_1, r_2 les deux racines réelles distinctes de (χ) et*

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

2. *Si* $\Delta = 0$ *alors on note* r *l'unique racine réelle de* (χ) *et*

$$S_0 = \left\{(\lambda x + \mu)e^{rx} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\},$$

3. *Si* $\Delta < 0$ *alors on note* $r \pm i\omega$ *les deux racines complexes conjuguées de* (χ)*, où* $r, \omega \in \mathbb{R}$*, et*

$$S_0 = \left\{(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))\, e^{rx} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Démonstration. Soient $r \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
On définit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $z(x) = y(x)e^{-rx}$ alors z est deux fois dérivable et on a

$$\begin{aligned} y(x) &= z(x)e^{rx}, \\ y'(x) &= z'(x)e^{rx} + rz(x)e^{rx} \text{ et} \\ y''(x) &= z''(x)e^{rx} + 2rz'(x)e^{rx} + r^2 z(x)e^{rx}. \end{aligned}$$

Donc

$$ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow az''(x) + (2ar + b)z'(x) + (ar^2 + br + c)z(x) = 0. \tag{9}$$

1. Si $\Delta = 0$, posons $r := -\frac{b}{2a}$ la racine double de (χ). Alors (9) donne $z''(x) = 0$.
   Donc $z(x) = \lambda x + \mu$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. Si $\Delta > 0$, posons $r := r_1$. Alors $r_1 \neq \frac{-b}{2a}$ et (9) se réécrit $(z')'(x) + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right) z'(x) = 0$.
   Donc, d'après le cours sur les EDL1, $z'(x) = \lambda e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)x}$ et donc $z(x) = \frac{-\lambda}{2r_1+\frac{b}{a}} e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)x} + \mu$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est $y(x) = \frac{-\lambda}{2r_1+\frac{b}{a}} e^{-\left(r_1+\frac{b}{a}\right)x} + \mu e^{r_1 x} = \tilde{\lambda} e^{r_2 x} + \tilde{\mu} e^{r_1 x}$ où $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu} \in \mathbb{R}$.

3. Si $\Delta < 0$, posons $r := \dfrac{-b}{2a}$ et $\omega := \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
   Alors les deux racines de (χ) sont $r \pm i\omega$ et on a $\dfrac{ar^2 + br + c}{a} = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = \omega^2$.
   Donc (9) devient
   $$z'' + \omega^2 z = 0. \tag{10}$$
   On déduit du lemme suivant que la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est $y(x) = e^{rx}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ■

Lemme 11.15. *La solution générale de* (10) *sur* $\mathbb{R}$ *est de la forme* $z(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$ *où* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On vérifie aisément que $z(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$ est solution de (10).
Réciproquement, soit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (10).
Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = z(x) - z(0)\cos(\omega x) - z'(0)\sin(\omega x)$ alors f est solution de (10).
Donc $f'f'' + \omega^2 f'f = 0$ d'où, en intégrant et en utilisant que $f(0) = f'(0) = 0$, $(f')^2 + \omega^2 (f)^2 = 0$.
Ainsi $f \equiv 0$, i.e. $z(x) = z(0)\cos(\omega x) + z'(0)\sin(\omega x)$, ce qui démontre le lemme. ■

Théorème 11.16 (EDL2 à coefficients constants avec seconde membre)**.**
Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On dénote par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur I de l'EDL2

$$ay" + by' + cy = d(x) \tag{E}$$

et par $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$ay" + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

Alors
1. $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{S},\ y_1 - y_2 \in \mathcal{S}_0$
2. $\forall y \in \mathcal{S}, \forall y_0 \in \mathcal{S}_0,\ y + y_0 \in \mathcal{S}$

Démonstration.

1. Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$. Alors $a(y_1 - y_2)" + b(y_1 - y_2)' + c(y_1 - y_2) = (ay_1" + by_1' + cy_1) - (ay_2" + by_2' + cy_2) = d - d = 0$.
   Donc $y_1 - y_2 \in \mathcal{S}_0$.
2. Soient $y \in \mathcal{S}$ et $y_0 \in \mathcal{S}_0$ alors $a(y + y_0)" + b(y + y_0)' + c(y + y_0) = (ay" + by' + cy) + (ay_0" + by_0' + cy_0) = d + 0 = d$.
   Donc $y + y_0 \in \mathcal{S}$.

■

Corollaire 11.17. *Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.*
On dénote par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur I de l'EDL2

$$ay" + by' + cy = d(x) \tag{E}$$

et par $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$ay" + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

Soit $y_p \in \mathcal{S}$ alors $\mathcal{S} = \left\{ y_p + y_0 \ :\ y_0 \in \mathcal{S}_0 \right\}$.

Démonstration.

- $\subset$ Soit $y \in \mathcal{S}$ alors $y = y_p + y_0$ où $y_0 = y - y_p \in \mathcal{S}_0$.
- $\supset$ Soit $y_0 \in \mathcal{S}_0$ alors $y_p + y_0 \in \mathcal{S}$. ■

Remarque 11.18. En pratique, on retiendra que

Solution générale de (E) = Solution particulière de (E) + Solution générale de (E_0).

Exemple 11.19 (Second membre de la forme polynôme–exponentielle)**.**
Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[x]$.
On cherche une solution particulière de

$$ay" + by' + cy = P(x)e^{sx} \tag{E}$$

de la forme $y_p(x) = Q(x)e^{sx}$ où $Q \in \mathbb{R}[x]$.
Alors

$$ay_p" + by_p' + cy_p = P(x)e^{sx} \Leftrightarrow aQ" + (2as + b)Q' + (as^2 + bs + c)Q = P$$

1. Si s n'est pas racine de l'équation caractéristique (χ).
   Alors $as^2 + bs + c \neq 0$ et il existe un tel Q vérifiant $\deg Q = \deg P$.

2. Si s est racine simple de l'équation caractéristique (χ).
   On obtient alors $aQ" + (2as + b)Q' = P$ avec $2as + b \neq 0$.
   Donc il existe un tel Q vérifiant $\deg Q = \deg P + 1$ et $Q(0) = 0$ (i.e. sans terme constant).

3. Si s est racine double de l'équation caractéristique (χ).
   On obtient alors $aQ" = P$.
   Donc il existe un tel Q vérifiant $\deg Q = \deg P + 2$, $Q(0) = 0$ et $Q'(0) = 0$ (i.e. sans terme constant et sans terme de degré 1).

11.3 Quelques EDO classiques

TODO

11.4 Exercices

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2 \quad$ sur $\mathbb{R}$.
2. $y' + y = 2\sin(x) \quad$ sur $\mathbb{R}$.
3. $y' + y = (x+1)e^x \quad$ sur $\mathbb{R}$.
4. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1 \quad$ sur $]0, +\infty[$.
5. $y' + y = \frac{1}{1+e^x} \quad$ sur $\mathbb{R}$.
6. $y' - \frac{1}{x}y = x^2 \quad$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2.

1. Déterminer l'unique solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 3$ de l'équation différentielle
$$(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1.$$
2. Déterminer l'unique solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $y(0) = 1$ de l'équation différentielle
$$y' + \tan(x)y = \sin(2x).$$
3. Déterminer l'unique solution sur $]0, \pi[$ vérifiant $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ de l'équation différentielle
$$\sin(x)y' - \cos(x)y = -1.$$

Exercice 3. Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $xy' - 2y = x^3$
2. $x^2y' - y = 0$
3. $xy' + y = 1$
4. $xy' - y = x$

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert quelconque (i.e. l'ensemble des solutions peut dépendre de I).

1. $x(1+x^2)y' - y = 0$
2. $xy' - 2y = x^4$
3. $x^2y' + y = 1$
4. $(1-x)y' - y = x$
5. $x(x-1)y' - (3x-1)y = -x^2(x+1)$
Indice : pour cette dernière question, on pourra remarquer que $\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ convenablement choisis et chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2.

Exercice 5. Trouver une équation différentielle dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$y(x) = \frac{C + x}{1 + x^2}$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Exercice 7. Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et b paire.
Montrer que l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x)$$

admet une unique solution impaire.
Indice : une solution impaire vérifie forcément une certaine condition initiale.

Exercice 8. On considère l'équation différentielle

$$y' - (x + 1)y = e^x.$$

1. Justifier que l'équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ telle que $y(0) = -1$.
2. On considère l'unique solution vérifiant $y(0) = -1$. Calculer

   $$\lim_{x \to 0} \frac{y(x) + 1}{x^\alpha}$$

   selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Indice : il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation pour répondre à cette question...

Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 9y = x + 1$
2. $y'' - 2y' + y = \sin(2x)$
3. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$
4. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$
5. $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$
6. $y'' - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x}\cos(x)$

Exercice 10. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$.
2. $y'' + 2y' + 4y = xe^x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.
3. $y'' + 9y = x + 1$, $y(0) = 0$.

Exercice 11. Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable proposé.

1. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ sur $\mathbb{R}$ en posant $t = e^x$.
2. $x^2y'' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$ en posant $t = \ln(x)$.
3. $y'' + \tan(x)y' - \cos^2(x)y = 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en posant $t = \sin(x)$.

Exercice 12. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1 + e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x + 1)y = xe^x.$$

Indice : on pourra changer d'inconnue en posant $z(x) = (1 + e^x)y(x)$.

Exercice 13. Trouver une équation différentielle dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-x}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Applications

Exercice 14. L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Exercice 15. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1, \\ f(0) = -4. \end{cases}$$

Exercice 16. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall s, t \in \mathbb{R},\ f(s + t) = f(s)f(t).$$

Indice : on pourra dériver la relation par rapport à s.

Exercice 17. On cherche à déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = e^x.$$

1. Montrer qu'une telle fonction f est nécessairement de classe C^2.
2. Montrer qu'une telle fonction f vérifie une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants.
3. Déterminer les fonctions f vérifiant les conditions de l'énoncé.

12 Séries entières et analyticité

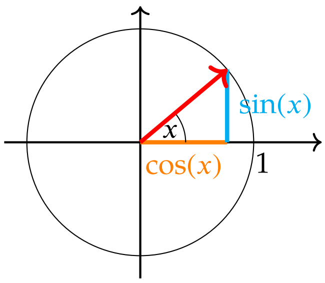
TODO

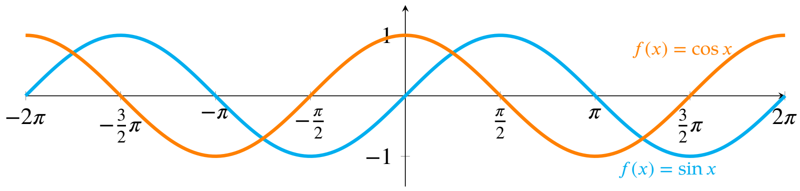
A Fonctions usuelles

A.1 Fonctions trigonométriques

A.1.1 Définitions et premières propriétés

Définition A.1. Soit x un angle en radians[33]. On note $(\cos(x), \sin(x))$ les coordonnées du point d'angle x sur le cercle centré en l'origine et de rayon 1. On a ainsi défini les fonctions *cosinus* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et *sinus* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.





Remarque A.2. Il est d'usage de noter $\cos^n(x)$ pour $(\cos(x))^n$ et $\sin^n(x)$ pour $(\sin(x))^n$.

Commençons par quelques propriétés élémentaires des fonctions sinus et consinus.

Proposition A.3.
- (i) *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques.*
- (ii) *La fonction cosinus est paire.*
- (iii) *La fonction sinus est impaire.*
- (iv) $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (Théorème de Pythagore).
- (v) $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leq 1$.
- (vi) $\forall x \in \mathbb{R},\ |\cos(x)| \leq 1$.

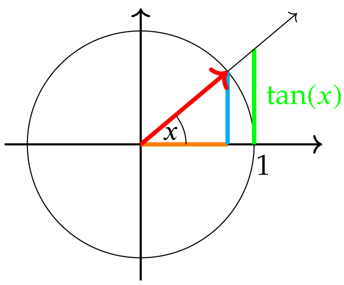
Proposition A.4. *Soit $x \in \mathbb{R}$, alors*
- $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2} + n\pi$
- $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z},\ x = n\pi$

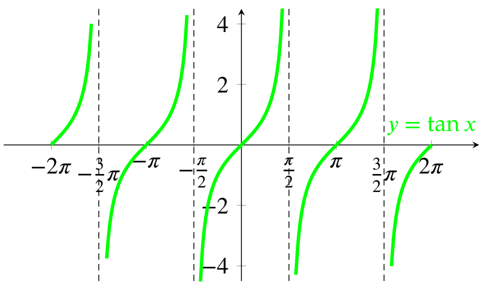
Définition A.5. On définit la fonction tangente par $\tan = \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$.

Proposition A.6. $\tan$ *est π-périodique.*

Démonstration. Voir les formules des angles associés ci-dessous. ■

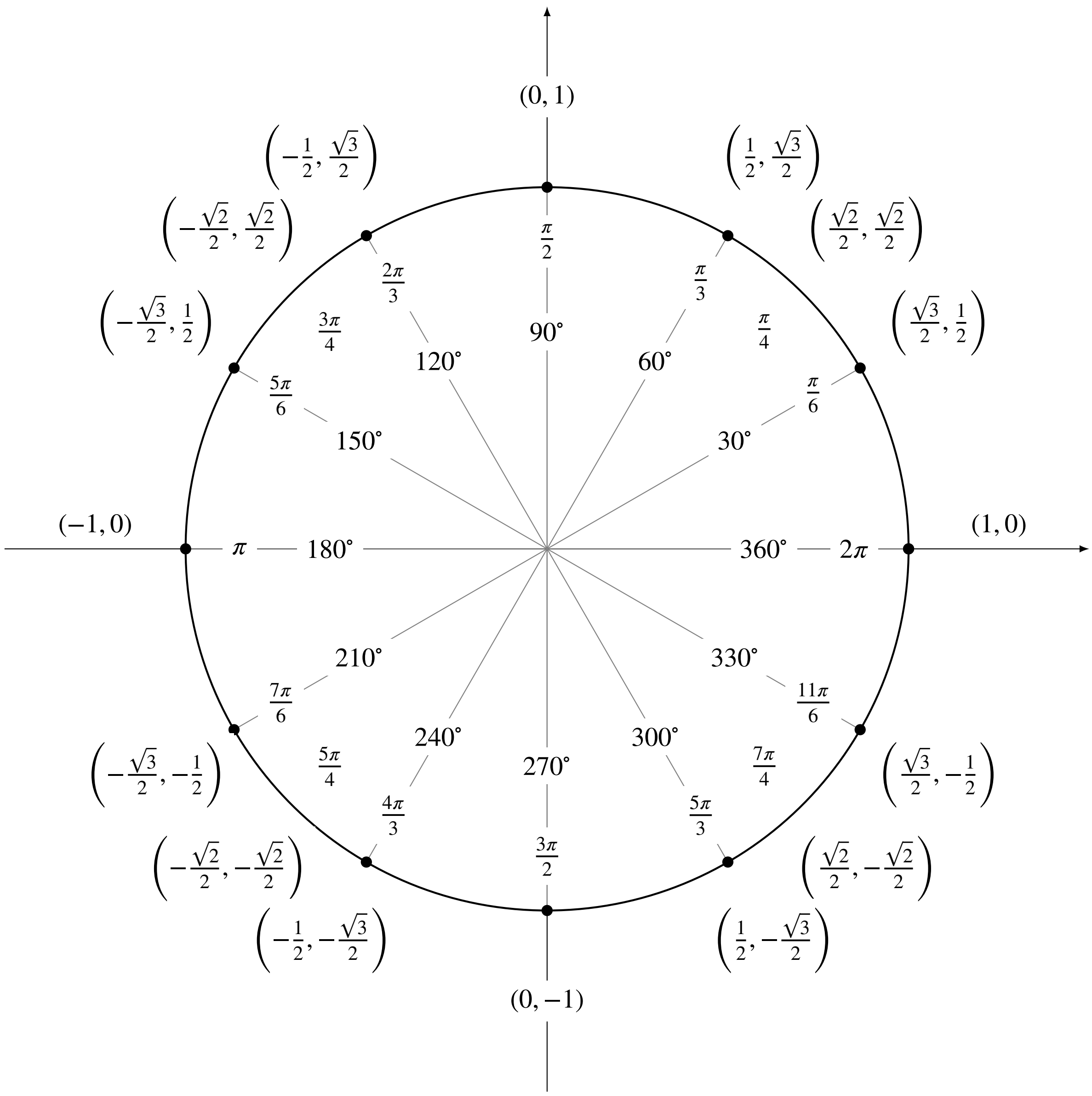
Remarque A.7. On démontre à l'aide du théorème de Thalès que la tangente d'un angle x correspond à la longueur du segment située sur la tangente au cercle au niveau de l'axe des abscisses entre ce dernier et la droite d'angle x, d'où son nom.





[33] On rappelle qu'un radian (1 rad) correspond à l'angle qu'il faut pour obtenir un arc de longueur r sur un cercle de rayon r.

Proposition A.8. *Voici quelques valeurs remarquables*[34] *des fonctions sinus et cosinus :*



Démonstration. Puisque $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on a $\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}$ si $x \in [0, \pi]$ et $\sin(x) = -\sqrt{1-\cos^2(x)}$ si $x \in [pi, 2\pi]$. Il suffit donc de déterminer $\cos(x)$.

- Pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, c'est évident.
- Pour $x = \frac{\pi}{4}$, il faut remarquer que le triangle rectangle dont l'hypoténuse est le rayon et un côté le cosinus est isocèle puis utiliser le théorème de Pythagore.
- Pour $x = \frac{\pi}{3}$, le triangle formé par les rayons d'angles 0 et x est équilatéral.
- Pour $x = \frac{\pi}{6}$, on utilise la symétrie par rapport à la première bissectrice pour remarquer que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Les autres valeurs remarquables s'obtiennent par symétrie. ■

[34] À connaître ou savoir retrouver.

A.1.2 Formulaire

1. Valeurs remarquables à connaître ou à savoir retrouver :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Moyen mnémotechnique : les valeurs remarquables sont de la forme $\frac{\sqrt{n}}{2}$ en incrémentant n de 0 à 4 pour sin et en décrémentant n de 4 à 0 pour cos.

2. Relations entre cos, sin **et** tan **:**

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

3. Formules d'addition :

- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$
- $\tan(x + y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$
- $\tan(x - y) = \dfrac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$

4. En particulier :

- $\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\\ &= 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)\end{aligned}$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

5. Produit en somme :

- $\cos(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(x + y) + \cos(x - y)\right)$
- $\sin(x)\sin(y) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(x - y) - \cos(x + y)\right)$
- $\sin(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(x + y) + \sin(x - y)\right)$

6. Somme en produit :

- $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
- $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
- $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

7. Avec la tangente de l'arc moitié ($\vartheta = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$) **:**

- $\sin(x) = \dfrac{2\vartheta}{1 + \vartheta^2}$
- $\cos(x) = \dfrac{1 - \vartheta^2}{1 + \vartheta^2}$
- $\tan(x) = \dfrac{2\vartheta}{1 - \vartheta^2}$

8. Angles associés :

- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

9. Pour les équations :

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2n\pi \quad \text{ou} \quad x = -a + 2n\pi \qquad (n \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2n\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - a + 2n\pi \qquad (n \in \mathbb{Z})$
- $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + n\pi \qquad (n \in \mathbb{Z})$

Démonstration.

- Les relations entre cos, sin et tan découlent du théorème de Pythagore.

- Les formules d'angles associés sont des conséquences des formules d'addition en utilisant les valeurs remarquables et la parité.

- Les formules de produit en somme découlent des formules d'addition.

- Les formules de somme en produit découlent des formules de produit en somme (en posant $x+y=X$ et $x-y=Y$, soit $x=\frac{X+Y}{2}$ et $y=\frac{X-Y}{2}$).

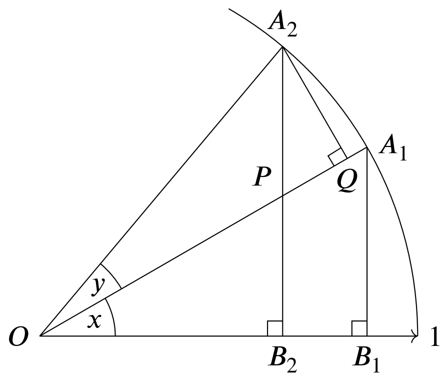
- Les formules avec la tangente de l'arc moitié découlent des formules précédentes :

$$\sin(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

  et que

$$\cos(x)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

- Il reste donc à démontrer les formules d'addition.
  Par parité, il suffit de montrer les relations $\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$ et $\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$.



  Par définition, on a $OB_1=\cos(x)$, $A_1B_1=\sin(x)$, $OB_2=\cos(x+y)$, $A_2B_2=\sin(x+y)$, $OQ=\cos(y)$ et $A_2Q=\sin(y)$.

  Remarquons que $\widehat{B_2PO}=\widehat{A_2PQ}$ donc $\widehat{PA_2Q}=x$. Ainsi, $\cos(x)=\frac{A_2Q}{A_2P}$ et $\sin(x)=\frac{PQ}{A_2P}$.
  On en déduit que $PQ=\frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)}$ et $OP=OQ-PQ=\cos(y)-\frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)}$.

  D'après le théorème de Thalès dans le triangle B_1OA_1, on a $\frac{OB_1}{OB_2}=\frac{OA_1}{OP}$ d'où

$$\cos(x+y)=\cos(x)\left(\cos(y)-\frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)}\right)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y).$$

On a $\sin(x) = \frac{PB_2}{OP}$ d'où

$$\begin{aligned}\sin(x+y) = A_2B_2 = A_2P + PB_2 &= \frac{\sin(y)}{\cos(x)} + OP\sin(x)\\ &= \frac{\sin(y)}{\cos(x)} + \cos(y)\sin(x) - \frac{\sin^2(x)\sin(y)}{\cos(x)}\\ &= \frac{(1-\sin^2(x))\sin(y)}{\cos(x)} + \cos(y)\sin(x)\\ &= \frac{\cos^2(x)\sin(y)}{\cos(x)} + \cos(y)\sin(x)\\ &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).\end{aligned}$$

■

Théorème A.9. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Il existe $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\psi).$$

Démonstration. On peut supposer que $(a, b) \neq (0, 0)$, sinon le résultat est trivial.
Posons $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $y = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Comme $x^2+y^2 = 1$, il existe φ tel que $(x, y) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$.
On a alors

$$\begin{aligned}a\cos(\theta) + b\sin(\theta) &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\theta)\right)\\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos(\varphi)\cos(\theta) - \sin(\varphi)\sin(\theta)\right)\\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi)\end{aligned}$$

On obtient la deuxième identité de façon similaire en posant $x = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

■

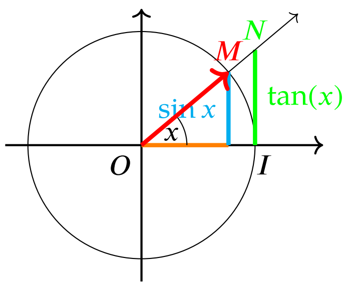
A.1.3 Régularité des fonctions trigonométriques

Théorème A.10. *Les fonctions* sin, cos *et* tan *sont dérivables (et donc continues) sur leurs domaines de définition respectifs. De plus, on a*

$$\cos'(x) = -\sin(x), \qquad \sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Lemme A.11. $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

Démonstration.



On remarque que l'aire du triangle OIM est $\frac{\sin(x)}{2}$, que l'aire du secteur angulaire OIM est $\frac{x}{2}$ et que l'aire du triangle OIN est $\frac{\tan(x)}{2}$. On a donc bien $0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$. ■

Démonstration du Théorème A.10.

- Étape 1 : montrons que sin est continue en 0. On déduit du Lemme A.11 que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin(x) = 0.$$

Par parité, on a bien que $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 = \sin(0)$.

- Étape 2 : montrons que cos est continue en 0.
On sait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et que cos est positif sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a donc

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{1 - \sin^2(x)} = 1 = \cos(0).$$

- Étape 3 : montrons que sin est dérivable en 0.
Soit $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. On déduit du Lemme A.11 que $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$, d'où
$\frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \leq \frac{1}{\cos(x)} \frac{\sin(x)}{x}$ et enfin

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Par parité, cette dernière inégalité reste vraie pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Donc $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h - 0} = 1$. Ainsi sin est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

- Étape 4 : montrons que cos est dérivable en 0.
On a

$$\frac{\cos(h) - \cos(0)}{h} = \frac{\cos(h) - 1}{h} = \frac{1}{\cos(h) + 1} \cdot \frac{\cos^2(h) - 1}{h} = \frac{-\sin(h)}{\cos(h) + 1} \cdot \frac{\sin(h)}{h}$$

d'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - \cos(0)}{h - 0} = 0.$$

Donc cos est dérivable en 0 et $\cos'(0) = 0$.

- Étape 5 : montrons que sin est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors pour $h \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h}\\ &= \sin(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x).$$

Donc sin est dérivable et $\sin' = \cos$.

- Étape 6 : montrons que cos est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$, alors pour $h \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} \\ &= \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}.\end{aligned}$$

  Ainsi

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = -\sin(x).$$

  Donc cos est dérivable et $\cos' = -\sin$. ■

Remarque A.12. On déduit du théorème précédent que les fonctions trigonométriques sont infiniment dérivables.

Remarque A.13. Nous avons utilisé que les angles étaient exprimés en radians pour obtenir les inégalités du Lemme A.11. En exprimant les angles en degrés, nous aurions obtenu d'autres formules pour les dérivées.
En effet, si on pose $\cos_{\mathrm{deg}}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{180}x\right)$ alors $\cos'_{\mathrm{deg}}(x) = -\frac{\pi}{180}\sin\left(\frac{\pi}{180}x\right)$.

A.2 Fonctions trigonométriques réciproques

A.2.1 Arc sinus

La fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est continue, strictement croissante et surjective[35]. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, cf 4.14, elle admet une fonction réciproque que l'on notera

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

et qui est continue et strictement croissante.
Cette fonction est caractérisée par

$$\forall (x,y) \in [-1,1]\times\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(y),$$

d'où on déduit que arcsin est impaire.
De plus, sin est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée $\sin' = \cos$ ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc, d'après le Théorème 5.9, arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\arcsin'(x) = \arcsin'(\sin(\arcsin(x))) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé que $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$ d'où

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$$

et donc $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ puisque cos est positif sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

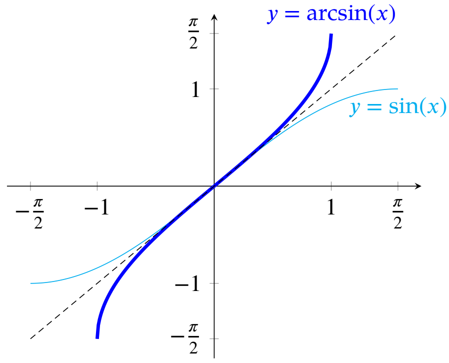
En résumé :

Proposition A.14. *La fonction* $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *vérifie les propriétés suivantes :*

[35] Il suffit de remarquer que $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ puis de conclure avec le théorème des valeurs intermédiaires, cf 4.7.

(1) $\forall x \in [-1,1],\ \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(y)$,
(2) arcsin *est continue,*
(3) arcsin *est strictement croissante,*
(4) arcsin *est impaire,*
(5) arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *de dérivée* $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

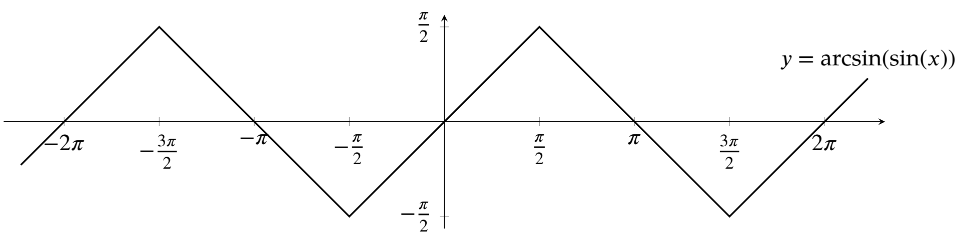
x	-1		1
$\arcsin'(x)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



Remarque A.15. Par définition, on a bien que

$$\forall x \in [-1,1],\ \sin(\arcsin(x)) = x.$$

Mais on prendra garde à ne pas écrire trop vite que $\arcsin(\sin(x)) = x$: c'est vrai lorsque $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ mais ce n'est plus le cas pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque.
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arcsin(\sin(x))$ est continue, 2π-périodique et impaire.
Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $f(x) = \sin(\arcsin(x)) = x$. Et, si $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ alors $f(x) = \arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$ puisque $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Son graphe est donc :



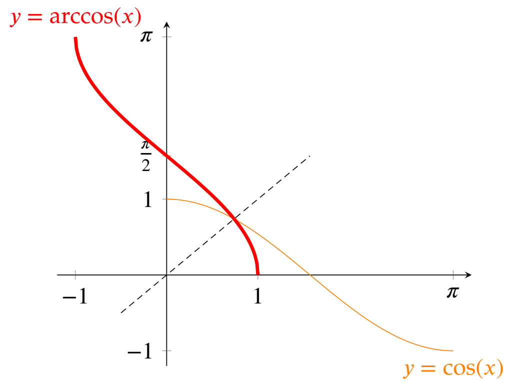
A.2.2 Arc cosinus

De même, on définit $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ comme la réciproque de $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$.

Proposition A.16. *La fonction* $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ *vérifie les propriétés suivantes :*
(1) $\forall x \in [-1,1],\ \forall y \in [0,\pi],\ y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$,
(2) arccos *est continue,*
(3) arccos *est strictement décroissante,*
(4) arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *de dérivée* $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Remarque A.17. Attention, arccos n'est ni paire, ni impaire.

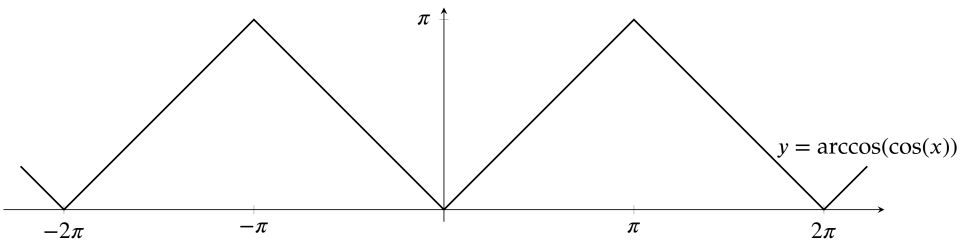
x	-1		1
$\arccos'(x)$	‖	$-$	‖
$\arccos(x)$	π	$\searrow$	0



Remarque A.18. Par définition, on a bien que

$$\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arccos(x)) = x.$$

Mais, comme pour arcsin, on prendra garde à ne pas écrire trop vite que $\arccos(\cos(x)) = x$: c'est vrai pour $x \in [0,\pi]$ mais pas pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque.
La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \arccos(\cos(x))$ est continue, 2π-périodique, paire et $\arccos(\cos(x)) = x$ sur $[0,\pi]$.
Son graphe est donc :



On peut ramener l'étude de arccos à celle de arcsin :

Proposition A.19. $\forall x \in [-1,1],\ \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \in [0,\pi]$ et que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \sin(\arcsin(x)) = x.$$

■

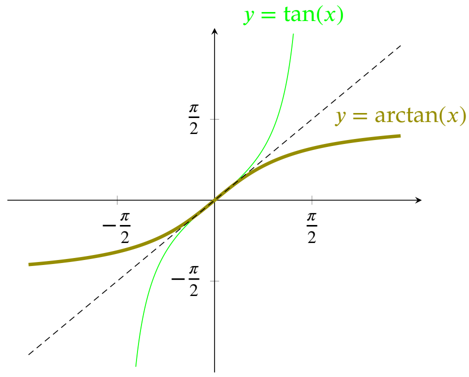
A.2.3 Arc tangente

De même, on définit $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ comme la réciproque de $\tan : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$.

Proposition A.20. *La fonction* $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$,
(2) arctan *est continue,*
(3) arctan *est strictement croissante,*
(4) arctan *est impaire,*
(5) arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée* $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ ∞
$\arctan'(x)$	$+$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2} \nearrow \frac{\pi}{2}$



A.3 Fonctions exponentielles

Théorème A.21. *Soit $a > 0$. Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :*
- (i) *f est monotone*
- (ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$
- (iii) $f(1) = a$

Cette fonction est appelée exponentielle de base *a et est notée $f = \exp_a$.*

Démonstration. Nous démontrons le résultat par analyse-synthèse.
Supposons qu'une telle fonction f existe alors :
- $a = f(1) = f(0+1) = f(0)f(1) = f(0)a$ et donc $f(0) = 1$ puisque $a \neq 0$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2$ donc $f \geq 0$.
- Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$ alors
$$a = f(1) = f(1 - x + x) = f(1-x)f(x) = 0$$
d'où une contradiction. Donc $f > 0$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1)^n = a^n$.
Si $-n \in \mathbb{N}$ alors $1 = f(0) = f(n-n) = f(n)f(-n) = f(n)a^{-n}$ donc $f(n) = a^n$.
- Soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors $a^p = f(p) = f(qx) = f(x + \cdots + x) = f(x)^q$, et on obtient donc $f(x) = a^x$.
- Remarquons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie les conditions de l'énoncé si et seulement si la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant $g(x) = f(-x)$ vérifie les mêmes conditions pour $\frac{1}{a}$ à la place de a. On peut donc supposer sans perte de généralité que $a \geq 1$.
- Supposons que $a = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$, d'où, par monotonie,
$$1 = f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor + 1) = 1 \quad \text{ou} \quad 1 = f(\lfloor x \rfloor) \geq f(x) \geq f(\lfloor x \rfloor + 1) = 1.$$
Ainsi, si $a = 1$ alors f est nécessairement constante égale à 1.
On peut donc supposer sans perte de généralité que $a > 1$.
- Si $a > 1$ alors f est strictement croissante.
Supposons par l'absurde que f soit décroissante. Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tels que $r_1 < r_2$, alors $a^{r_1} = f(r_1) \geq f(r_2) = a^{r_2}$. D'où une contradiction.
- Montrons que f est continue en 0.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'Exemple 4.16, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que
$$\left|a^{-\frac{1}{n}} - 1\right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| \leq \varepsilon.$$
Posons $\eta \coloneqq \frac{1}{n}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq \eta$ alors $-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}$ d'où $a^{-\frac{1}{n}} - 1 \leq f(x) - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1$.
Donc $|f(x) - 1| \leq \max\left(\left|a^{-\frac{1}{n}} - 1\right|, \left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right|\right) \leq \varepsilon$.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ alors, par continuité en 0, on a
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x-x_0)f(x_0) = f(0)f(x_0) = f(x_0).$$
Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, alors
$$M_x \coloneqq \sup\left\{a^r \;:\; r\in\mathbb{Q},\, r\leq x\right\}$$
est bien défini car l'ensemble considéré est non-vide et majoré par $a^{\lfloor x\rfloor+1}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall y\in\mathbb{R},\ |y-x|\leq\eta \implies |f(y)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$
Par définition de M_x, il existe $r_1\in\mathbb{Q}$ tel que $r_1\leq x$ et $M_x - \frac{\varepsilon}{2} < a^{r_1}$.
Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r_2\in\mathbb{Q}$ tel que $x-\eta\leq r_2\leq x$.
Posons $r \coloneqq \max(r_1, r_2)$. Alors $r\in\mathbb{Q}$ et $r\leq x$ et ainsi $a^r\leq M_x$ par définition de M_x.
De plus $M_x - \frac{\varepsilon}{2} < a^{r_1} \leq a^r$. Ainsi $|M_x - a^r| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Enfin, on a $0\leq x-r\leq x-r_1\leq\eta$, d'où $|f(x)-a^r| = |f(x)-f(r)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$.
Donc,
$$|f(x)-M_x|\leq|f(x)-a^r|+|M_x-a^r|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$
On a montré que $\forall\varepsilon>0$, $|f(x)-M_x|\leq 0$ et donc $f(x)=M_x$.

On a donc montré que l'on pouvait supposer $a > 1$ et alors que nécessairement $f(x) = \sup\left\{a^r \;:\; r\in\mathbb{Q},\, r\leq x\right\}$. Vérifions maintenant que cette fonction convient.
On définit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $f(x) = \sup E_x$ où $E_x \coloneqq \left\{a^r \;:\; r\in\mathbb{Q},\, r\leq x\right\}$ et $a > 1$, alors :

- Soient $x, y\in\mathbb{R}$ tels que $x < y$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r_1, r_2\in\mathbb{R}$ tels que $x < r_1 < r_2 < y$. Alors $E_x\subset E_{r_1}\subset E_{r_2}\subset E_y$, d'où, en passant à la borne supérieure $f(x)\leq f(r_1) = a^{r_1} < a^{r_2} = f(r_2)\leq f(y)$. Donc f est strictement croissante.
- Soient $x, y\in\mathbb{R}$.
  - Montrons que $f(x)f(y)$ est un majorant de E_{x+y}.
    Soit $r\in\mathbb{Q}$ tel que $r\leq x+y$.
    Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $s\in\mathbb{Q}$ tel que $r-x\leq s\leq y$. Donc $a^s\leq f(y)$.
    Puis $r-s\leq x$ et donc $a^r a^{-s} = a^{r-s}\leq f(x)$.
    Et donc $a^r\leq f(x)a^s\leq f(x)f(y)$.
  - Montrons que $f(x)f(y)$ est le plus petit majorant de E_{x+y}.
    Soit M un majorant de E_{x+y}.
    Soit $r_2\in\mathbb{Q}$ tel que $r_2\leq y$. Alors pour tout $r_1\in\mathbb{Q}$ tel que $r_1\leq x$, on a $r_1+r_2\leq x+y$, d'où $a^{r_1+r_2}\leq M$ et $a^{r_1}\leq\frac{M}{a^{r_2}}$. Ainsi $f(x)\leq\frac{M}{a}^{r_2}$.
    On a montré que pour tout $r_2\in\mathbb{Q}$ tel que $r_2\leq y$, on a $a^{r_2}\leq\frac{M}{f(x)}$. Ainsi, $f(y)\leq\frac{M}{f(x)}$.
    Donc $f(x)f(y)\leq M$.

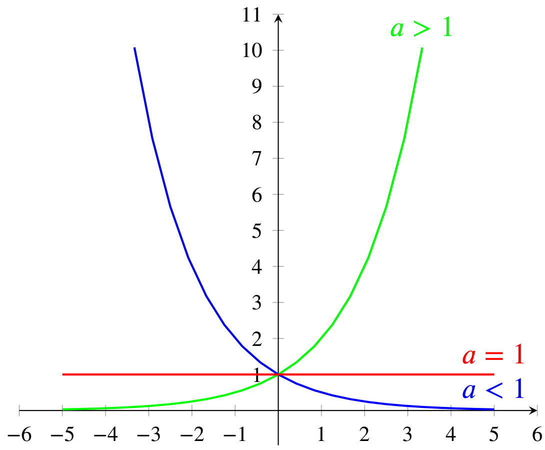
  On a donc montré que $f(x)f(y) = \sup E_{x+y} = f(x+y)$.
- On vérifie aisément que $a\in E_1$ et que a est un majorant de E_1 donc $f(1) = \sup E_1 = a$.

■

Nous avons vu dans la démonstration précédente que :

Proposition A.22. *Soit $a > 0$, alors :*
- $\exp_a > 0$.
- $\exp_a(0) = 1$.
- $\exp_a$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.
- $\forall x\in\mathbb{Q}$, $\exp_a(x) = a^x$.
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exp_{\frac{1}{a}}(x) = \exp_a(-x)$.

- *Si* $a = 1$ *alors* $\exp_a$ *est constante égale à* 1.
- *Si* $a \in]0, 1[$ *alors* $\exp_a$ *est strictement décroissante.*
- *Si* $a \in]1, +\infty[$ *alors* $\exp_a$ *est strictement croissante.*



Remarque A.23. On a vu que l'exponentielle de base a prolonge la fonction $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ définie par $x \mapsto a^x$ de façon continue sur $\mathbb{R}$. On pose donc, pour $x \in \mathbb{R}$, $a^x \coloneqq \exp_a(x)$.
Les deux propositions suivantes énoncent que pour tout $a, b > 0$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad \text{et} \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

Proposition A.24. *Soient* $a > 0$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$ *alors* $\exp_{\exp_a(x)}(y) = \exp_a(xy)$.

Démonstration. On vérifie que $y \mapsto \exp_a(xy)$ vérifie les axiomes de la définition de l'exponentielle en base $\exp_a(x)$. ■

Proposition A.25. *Soient* $a, b > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *alors* $\exp_{ab}(x) = \exp_a(x)\exp_b(x)$.

Démonstration. On vérifie que $x \mapsto \exp_a(x)\exp_b(x)$ vérifie les axiomes de la définition de l'exponentielle en base ab. ■

Proposition A.26. *Si* $a \neq 1$ *alors* $\mathrm{Im}(\exp_a) = \mathbb{R}_{>0}$.

Démonstration. Puisque $\exp_{\frac{1}{a}}(x) = \exp_a(-x)$, il suffit de démontrer l'énoncé pour $a > 1$.
On a déjà montré que $\mathrm{Im}(\exp_a) \subset \mathbb{R}_{>0}$, montrons l'autre inclusion.
Soit $y > 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(a-1) > y$. D'après l'inégalité de Bernoulli (Exemple 1.86), on a alors

$$\exp_a(n) = a^n = (1 + a - 1)^n \geq 1 + n(a-1) > y.$$

De même, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m(a-1) > \frac{1}{y}$ d'où $a^m \geq 1 + m(a-1) > \frac{1}{y}$ et alors

$$\exp_a(-m) = a^{-m} < y.$$

Puisque $\exp_a$ est continue et que $a^{-m} < y < a^n$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp_a(x) = y$. Donc $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathrm{Im}(\exp_a)$. ■

Proposition A.27. *Pour tout* $a > 0$, *la fonction* $\exp_a$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp_a'(x) = \exp_a'(0)\exp_a(x)$.

Démonstration[36]. ***TODO :*** *$\varphi(h) = \frac{e^h-1}{h}$ est minorée par 0 et croissante donc la limite à droite existe ; $\varphi(h) = \frac{\varphi(-h)}{e^h}$ donc la limite à gauche existe ; donc c'est dérivable.* ∎

Remarque A.28. On déduit de la proposition précédente que $\exp_a$ est infiniment dérivable.

Proposition A.29. *Il existe un unique réel $e > 0$ tel que $\exp_e'(0) = 1$.*
Ce nombre e s'appelle constante d'Euler.

Démonstration. Soit $a > 0$ tel que $a \neq 1$. Remarquons que $\exp_a'(0) \neq 0$, sinon quoi $\exp_a$ serait constante puisque $\exp_a'(x) = \exp_a'(0)\exp_a(x) = 0$.
Posons $e := \exp_a\left(\frac{1}{\exp_a'(0)}\right)$. Alors[37] $\exp_e(x) = \exp_a\left(\frac{x}{\exp_a'(0)}\right)$.
Donc $\exp_e'(0) = \frac{1}{\exp_a'(0)}\exp_a'(0) = 1$.
Montrons l'unicité. Supposons que $\tilde{e}$ convienne aussi et posons $h(x) = \frac{\exp_e(x)}{\exp_{\tilde{e}}(x)}$ alors

$$h'(x) = \frac{\exp_e'(x)\exp_{\tilde{e}}(x) - \exp_e(x)\exp_{\tilde{e}}'(x)}{\exp_{\tilde{e}}(x)^2} = \frac{\exp_e(x)\exp_{\tilde{e}}(x) - \exp_e(x)\exp_{\tilde{e}}(x)}{\exp_{\tilde{e}}(x)^2} = 0$$

Donc h est constante égale à $h(0) = 1$. Ainsi $\frac{e}{\tilde{e}} = \frac{\exp_e(1)}{\exp_{\tilde{e}}(1)} = h(1) = 1$. ∎

Définition A.30. On appellera *exponentielle* la fonction exponentielle de base e et, pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\exp(x) := \exp_e(x) = e^x$.

Proposition A.31. $\exp$ *est l'unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.*

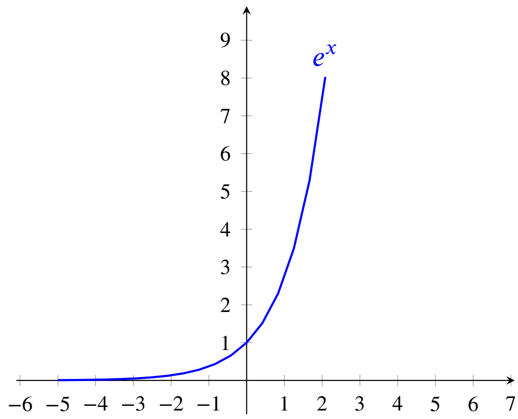
Démonstration. Supposons que f convienne et définissons $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$.
Alors, pour $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \frac{f'(x)\exp(x) - f(x)\exp'(x)}{\exp(x)^2} = \frac{f(x)exp(x) - f(x)\exp(x)}{\exp(x)^2} = 0$.
Donc h est constante égale à $h(0) = 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{f(x)}{\exp(x)} = 1$. ∎

Nous récapitulons ci-dessous les propriétés de l'exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
- exp est continue.
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.
- exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\mathrm{Im}(\exp) =]0, +\infty[$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, i.e. $e^{x+y} = e^x e^y$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, i.e. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
- $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$

[36]On aurait aussi pu utiliser le théorème fondamental de l'analyse en remarquant que

$$\exp_a(x) = \frac{\int_0^1 \exp_a(x+y)\mathrm{d}y}{\int_0^1 \exp_a(y)\mathrm{d}y} = \frac{\int_x^{x+1} \exp_a(z)\mathrm{d}z}{\int_0^1 \exp_a(y)\mathrm{d}y} = \frac{\int_0^{x+1} \exp_a(z)\mathrm{d}z - \int_0^x \exp_a(z)\mathrm{d}z}{\int_0^1 \exp_a(y)\mathrm{d}y}.$$

[37]Il suffit de vérifier que cette fonction vérifie les conditions du Théorème **??** pour e.



Proposition A.32.

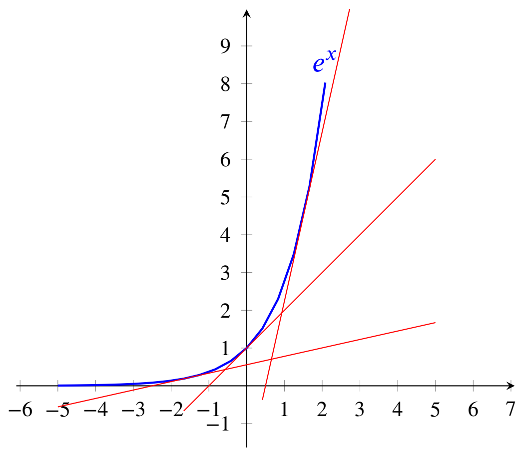
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Démonstration. Il s'agit juste de $\exp'(0)=1$. ■

Proposition A.33. $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ e^x>1+x$

Démonstration. Il suffit d'étudier la fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $h(x)=e^x-1-x$. ■

Remarque A.34. On déduit de la proposition précédente que la courbe représentative de l'exponentielle se situe au-dessus de toutes ses tangentes.
En effet, la tangente de exp en (a,e^a) admet une équation de la forme $y=e^a(x+1-a)$.
Et, pour $x\neq a$, on a $e^{x-a}>x+1-a$ d'où $e^x>e^a(x+1-a)$.



Proposition A.35 (Croissances comparées, version exponentielle)**.** *Soit* $n\in\mathbb{N}$, *alors*

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$

Démonstration. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a

$$e^{\frac{x}{n+1}}\geq 1+\frac{x}{n+1}>\frac{x}{n+1}$$

d'où

$$e^x>\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

et donc

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)^{n+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

La deuxième limite se déduit de la première à l'aide du changement de variable $u = -x$:

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{u\to+\infty} (-1)^n \frac{u^n}{e^u} = 0.$$

■

A.4 Fonctions logarithmes

Soit $a \in]0,1[\cup]1+\infty[$. Alors, on a vu que la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est continue, strictement monotone et surjective. Ainsi, d'après le Théorème 4.14, elle admet une fonction réciproque que l'on appelle *logarithme de base a*, notée $\log_a :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, et qui est continue et de même monotonie que $\exp_a$ (i.e. strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$).
Cette fonction est caractérisée par

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = \exp_a(y).$$

De plus, $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp_a'$ ne s'annule pas, donc, d'aprème le Théorème 5.9, $\log_a$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\exp_a'(\log_a(x))} = \frac{1}{\exp_a'(0)\exp_a(\log_a(x))} = \frac{1}{\exp_a'(0)x}.$$

En résumé :

Proposition A.36. *La fonction* $\log_a :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = \exp_a(y)$,

(2) $\begin{cases} \textit{si } a > 1 \textit{ alors } \log_a \textit{ est strictement croissante} \\ \textit{si } 0 < a < 1 \textit{ alors } \log_a \textit{ est strictement décroissante} \end{cases}$,

(3) $\log_a(1) = 0$ *et* $\log_a(a) = 1$,

(4) $\forall x, y > 0,\ \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$,

(5) $\forall a \in]0,1[\cup]1+\infty[,\ \forall x > 0,\ \log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$,

(6) $\forall a, b \in]0,1[\cup]1+\infty[,\ \forall x > 0,\ \log_b(x) = \log_b(a)\log_a(x)$,

(7) $\log_a$ *est continue,*

(8) $\log_a$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_{>0}$ *de dérivée* $\log_a'(x) = \frac{1}{\exp_a'(0)x}$.

Définition A.37. On appelle *logarithme népérien* le logarithme de base e que l'on note

$$\ln \coloneqq \log_e :]0,+\infty[\to \mathbb{R}.$$

On récapitule les propriétés du logarithme népérien :

Proposition A.38.

(1) $\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$,

(2) $\ln$ *est strictement croissante,*

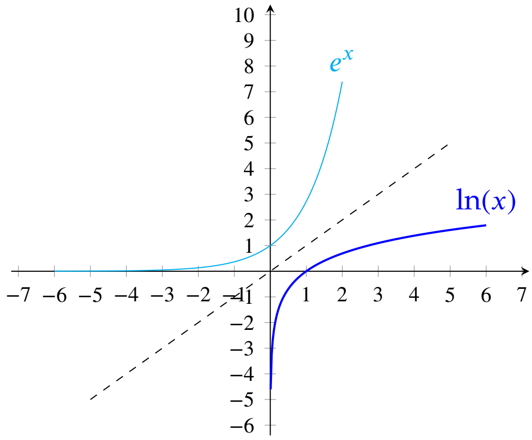
(3) $\ln(1) = 0$ *et* $\ln(e) = 1$,

(4) $\forall x, y > 0,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,

(5) $\forall x > 0,\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$,

(6) $\ln$ *est continue,*

(7) $\ln$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_{>0}$ *de dérivée* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.



Proposition A.39. *Soit* $a > 0$ *alors*

$$\forall x > 0,\ \exp_a(x) = \exp(x\ln(a)).$$

Démonstration. On vérifie que $x \mapsto \exp(x\ln(a))$ vérifie les propriétés du Théorème A.21. ■

Proposition A.40. *Soit* $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ *alors*

$$\forall x > 0,\ \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Démonstration. Soit $x > 0$ alors

$$\exp_a\left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right) = \exp\left(\ln x\right) = x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{\ln(\exp_a(x))}{\ln(a)} = \frac{\ln(\exp(x\ln(a)))}{\ln(a)} = \frac{x\ln(a)}{\ln(a)} = x.$$

■

Nous terminons cette section avec quelques limites à connaître.

Proposition A.41. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$

Démonstration. Il s'agit juste de $\ln'(1)$. ■

Le résultat suivant signifie qu'au voisinage de l'origine $\ln(1+x)$ se comporte comme x :

Corollaire A.42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Démonstration. On considère le changement de variable $u = x + 1$ et alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{u\to 1}\frac{\ln(y)}{u-1} = 1.$$

■

Proposition A.43. $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ \ln(x) < x - 1$

Démonstration. Il suffit d'étudier la fonction $h\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \ln(x) - x + 1$. ■

Remarque A.44. On retrouve ainsi la version logarithmique de la Remarque A.34 : la courbe représentative du logarithme népérien est en-dessous de toutes ses tangentes.
En effet, la tangente de la courbe représentative du logarithme népérien en $(a, \ln(a))$ admet pour équation $y = \frac{1}{a}x + \ln(a) - 1$. Puis, d'après l'inégalité précédente, pour $x \in]0, +\infty[\setminus \{a\}$, on a $\ln\left(\frac{x}{a}\right) < \frac{x}{a} - 1$ d'où $\ln(x) < \frac{1}{a}x + \ln(a) - 1$.

La proposition suivante est la contrepartie "logarithmique" de la Proposition A.35.

Proposition A.45 (Croissances comparées, version logarithmique)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors*

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \ln(x) = 0$

Démonstration. Remarquons d'abord que $\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\ln(x^n)}{nx^n}$. Ainsi, quitte à utiliser le changement de variable $u = x^n$, il suffit de montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

On remarque que

$$\frac{1}{2}\ln(x) = \ln(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} - 1.$$

Donc pour x assez grand, on a

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq 2\frac{\sqrt{x} - 1}{x}$$

d'où la première inégalité.
Puis en posant $v = \frac{1}{x}$, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \ln(x) = \lim_{v\to+\infty} -\frac{\ln(v)}{v^n} = 0.$$

■

***TODO :** Montrer que $e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et puis que $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$ via Taylor avec reste intégral.* x

A.5 Fonctions puissances et racines n-ièmes

Définition A.46. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la fonction *puissance d'exposant a* la fonction

$$\pi_a : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a = e^{a\ln(x)} \end{array} \right.$$

Remarque A.47. On prendra garde à ne pas confondre l'exponentielle de base a, i.e. $\exp_a(x) = a^x$, avec la fonction puissance d'exposant a, i.e. $\pi_a(x) = x^a$.

Remarque A.48. $(a^b)^c = a^{bc} \neq a^{(b^c)}$

Proposition A.49.
- *Si* $a > 0$ *alors* $\lim_{x\to 0^+} x^a = 0$.
- *Si* $a = 0$ *alors* $\lim_{x\to 0^+} x^0 = 1$.

- *Si* $a < 0$ *alors* $\lim_{x\to 0^+} x^a = +\infty$.

Proposition A.50. *La fonction* π_a *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et*

$$\pi_a'(x) = ax^{a-1}.$$

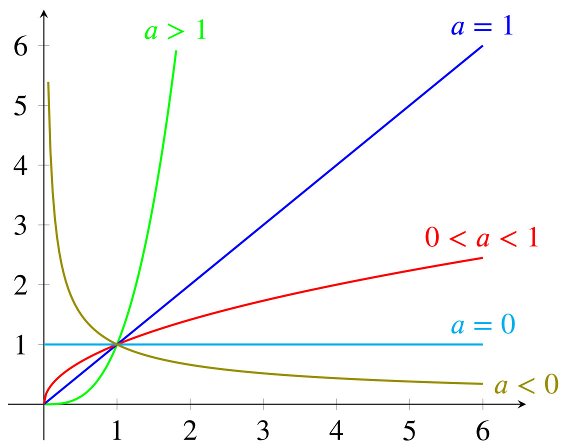
On obtient alors :

Si $a < 0$:

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$\pi_a'(x)$	$-$
$\pi_a(x)$	$+\infty \searrow 0$

Si $a > 0$:

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$\pi_a'(x)$	$+$
$\pi_a(x)$	$0 \nearrow +\infty$



Proposition A.51. *Si* $a \neq 0$ *alors* $\pi_a :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ *et* $\pi_{\frac{1}{a}} :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ *sont réciproques l'une de l'autre.*

B Quelques mots sur les entiers et les rationnels

***TODO :** Étoffer et détailler…*

Fait B.1 ($\mathbb{N}$ est bien ordonné)**.** *Toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*

Remarque B.2. ***TODO :** Expliquer l'équivalence avec le principe du raisonnement par récurrence*

Corollaire B.3.
- *Une partie non-vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.*
- *Une partie non-vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.*

Théorème B.4 (Division euclidienne)**.**
Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}.$$

On dit que q et r sont respectivement le quotient *et le* reste *de la division euclidienne de a par b.*

Démonstration.
Existence :
Premier cas : $b > 0$.
Posons$E \coloneqq \{p \in \mathbb{Z} \ : \ bp \leq a\}$, alors :
- $E \neq \varnothing$ puisque si $a \geq 0$ alors $0 \in E$ et sinon $a \in E$;
- $|a|$ est un majorant de E.
  En effet, soit $p \in E$.
  Si $p \leq 0$ alors $p \leq 0 \leq |a|$.
  Sinon, si $p > 0$, alors $1 \leq b \implies p \leq bp \leq a \leq |a|$.

Donc E admet un plus grand élément comme partie de $\mathbb{Z}$ non-vide et majorée : il existe $q \in E$ tel que $\forall p \in E, \ p \leq q$.
Posons $r \coloneqq a - bq$. Puisque $q \in E$, on a $r = a - bq \geq 0$.
Et $q + 1 \notin E$ puisque q est le plus grand élément de E et que $q + 1 > q$.
Ainsi $b(q + 1) > a$, d'où $r = a - bq < b = |b|$.
On a bien $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$.
Deuxième cas : $b < 0$.
On applique le premier cas à a et à $-b > 0$: il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = -bq + r = b(-q) + r$ où $0 \leq r < -b = |b|$.

Unicité : supposons que les couples (q, r) et (q', r') conviennent.
Alors $r' - r = (a - bq') - (a - bq) = b(q - q')$. De plus

$$\begin{cases} 0 \leq r < |b| \\ 0 \leq r' < |b| \end{cases} \implies \begin{cases} -|b| < -r \leq 0 \\ 0 \leq r' < |b| \end{cases} \implies -|b| < r' - r < |b|.$$

Donc $-|b| < b(q - q') < |b|$, d'où $|b||q - q'| = |b(q - q')| < |b|$.
Puisque $|b| > 0$, on obtient $0 \leq |q - q'| < 1$.
Ainsi[38] $|q - q'| = 0$, d'où $q - q' = 0$, i.e. $q = q'$.
Et enfin, $r' = b - aq' = b - aq = r$. ∎

***TODO :** Exemples*
***TODO :** Compléter cette partie…*

[38] Voir l'Exercice 24 du premier chapitre.

C Une construction de la droite réelle

Il existe plusieurs constructions d'un corps totalement ordonné Dedekind-complet[39]. Cependant deux tels corps sont isomorphes via un isomorphisme préservant l'ordre : $\mathbb{R}$ est donc bien l'*unique* corps totalement ordonné Dedekind-complet.

Parmi ces constructions, on peut citer :

- La construction par les coupures de Dedekind : si on aligne tous les nombres rationnels sur une droite et que l'on coupe la droite en deux, il est possible que le trait de coupe ne rencontre aucun nombre rationnel (présence de *trous* – il s'agit formellement d'une coupure n'admettant pas de borne supérieure, voir (I)). Cette construction consiste à obtenir $\mathbb{R}$ en comblant ces trous. Ce faisant on obtient un corps totalement ordonné vérifiant l'axiome des coupures (dont on montre facilement qu'il est équivalent à la propriété de la borne supérieure).
- La construction de $\mathbb{R}$ comme complété de $\mathbb{Q}$: il s'agit d'ajouter formellement à $\mathbb{Q}$ les limites de suites de rationnels qui sont de Cauchy mais qui ne convergent pas dans $\mathbb{Q}$ (en faisant attention que deux suites de Cauchy distinctes peuvent avoir la même limite). Le corps obtenu hérite du caractère archimédien de $\mathbb{Q}$: on obtient ainsi un corps totalement ordonné qui est Cauchy-complet et archimédien. Ces deux propriétés sont équivalentes à la propriété de la borne supérieure – attention, on peut construire un corps totalement ordonné Cauchy-complet, mais non-archimédien, qui n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}$.
- On peut construire $\mathbb{R}$ à partir du développement décimal : un nombre réel correspond alors à la donnée d'un entier (partie entière) et d'une suite de chiffres (développement décimal de la partie fractionnaire) qui n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang. Cette construction semble a priori plus naturelle mais les opérations sont plus délicates à définir (cependant la propriété de la borne supérieure s'obtient facilement).
- Il existe d'autres constructions plus ou moins difficiles et naturelles (par exemple, $\mathbb{R}$ s'identifie à l'ensemble des *quasi-morphismes* de groupes $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ modulo *quasi-égalité* – intuitivement, $\alpha \in \mathbb{R}$ correspond à $n \mapsto \lfloor \alpha n \rfloor$).

Le problème ci-dessous présente la construction de $\mathbb{R}$ par les coupures de Dedekind, ainsi que l'unicité de $\mathbb{R}$ (à isomorphisme près) dans la partie (VI).

Définition C.1. On appelle *coupure de Dedekind* une partie $A \subset \mathbb{Q}$ vérifiant :
(A1) $A \neq \varnothing$
(A2) $A \neq \mathbb{Q}$
(A3) $\forall r \in A, \forall s \in \mathbb{Q}, s < r \implies s \in A$
(A4) $\forall r \in A, \exists s \in A, r < s$
On note l'ensemble des coupures de Dedekind par $\mathcal{R}$.

[39] On rappelle qu'un corps totalement ordonné est *Dedekind-complet* s'il vérifie la propriété de la borne supérieure (toute partie non-vide et majorée admet une borne supérieure, c'est-à-dire un plus petit majorant) ou tout autre énoncé équivalent (TVI, Rolle, TAF, Weierstrass, TFA, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente, toute suite décroissante et minorée converge...).

(I) (I.1) Montrer que la condition (A3) est équivalente à $\forall r \in A,\ \forall s \in \mathbb{Q} \setminus A,\ r < s$.

(I.2) Montrer qu'une coupure de Dedekind n'a pas de plus grand élément.

(I.3) Pour $q \in \mathbb{Q}$, on pose $A_q \coloneqq \{r \in \mathbb{Q} \ :\ r < q\}$.

(I.3.a) Montrer que A_q est une coupure de Dedekind.

(I.3.b) Montrer que $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathcal{R}$ définie par $\Phi(q) = A_q$ est injective.

(I.4) Montrer qu'une coupure de Dedekind A admet une borne supérieure (dans $\mathbb{Q}$) si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $A = A_q$.

(II) Étant donnés $A, B \in \mathcal{R}$, on note $A \leq B$ pour $A \subset B$.

(II.1) Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre totale sur $\mathcal{R}$.

(II.2) Montrer que $\forall A \in \mathcal{R},\ A > A_0 \Leftrightarrow 0 \in A$.

(II.3) Montrer que $\forall r, s \in \mathbb{Q},\ r \leq s \implies \Phi(r) \leq \Phi(s)$.

(II.4) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{R},\ A < B \implies (\exists q \in \mathbb{Q},\ A < A_q < B)$.
On vient de montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathcal{R}$ pour l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathcal{R}$ induite par Φ.

(II.5) Soit $\mathscr{F}$ une partie non-vide et majorée de $\mathcal{R}$. Posons $M \coloneqq \bigcup_{A \in \mathscr{F}} A$.

(II.5.a) Montrer que $M \in \mathcal{R}$.

(II.5.b) Montrer que M est la borne supérieure de $\mathscr{F}$.

On vient de montrer que toute partie non-vide et majorée de $\mathcal{R}$ admet une borne supérieure.

(III) Pour $A, B \in \mathcal{R}$, on pose $A + B \coloneqq \{a + b \ :\ a \in A,\ b \in B\}$.

(III.1) Montrer que $A + B$ est une coupure de Dedekind.

(III.2) Montrer que $\forall r, s \in \mathbb{Q},\ \Phi(r + s) = \Phi(r) + \Phi(s)$.

(III.3) Montrer que $+$ est commutative.

(III.4) Montrer que $+$ est associative.

(III.5) Montrer que $\forall A \in \mathcal{R},\ A + A_0 = A$.

(III.6) Pour $A \in \mathcal{R}$, on pose $-A \coloneqq \{q \in \mathbb{Q} \ :\ \exists p \in \mathbb{Q},\ p > 0 \text{ et } -q - p \notin A\}$.

(III.6.a) Montrer que $-A$ est une coupure de Dedekind.

(III.6.b) Montrer que $\forall A \in \mathcal{R},\ A + (-A) \subset A_0$.

(III.6.c) Soit $z \in A_0$ tel que $-z \in A$.
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $-nz \in A$ et $-(n+1)z \in \mathbb{Q} \setminus A$.
En déduire qu'il existe $a \in A$ et $b \in -A$ tel que $z = a + b$.

(III.6.d) Soit $z \in A_0$ tel que $-z \in \mathbb{Q} \setminus A$.
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n-1)z \in \mathbb{Q} \setminus A$ et $nz \in A$.
En déduire qu'il existe $a \in A$ et $b \in -A$ tel que $z = a + b$.

(III.6.e) Conclure que $\forall A \in \mathcal{R},\ A + (-A) = A_0$.

(III.7) Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{R},\ A \leq B \implies A + C \leq B + C$.

(IV) Pour $A, B \in \mathcal{R}$ vérifiant $A > A_0$ et $B > A_0$, on pose

$$A \cdot B \coloneqq \{q \in \mathbb{Q} \;:\; \exists a \in A,\ \exists b \in B,\ a > 0,\ b > 0,\ q \leq ab\}.$$

(IV.1) Montrer que $A \cdot B$ est une coupure de Dedekind.

On prolonge la multiplication à $\mathcal{R}$ en utilisant la règle des signes :

$A \cdot B \coloneqq$

	$A = A_0$	$A > A_0$	$A < A_0$
$B = A_0$	A_0	A_0	A_0
$B > A_0$	A_0	$A \cdot B$	$-((-A) \cdot B)$
$B < A_0$	A_0	$-(A \cdot (-B))$	$(-A) \cdot (-B)$

(IV.2) Montrer que $\forall r, s \in \mathbb{Q},\ \Phi(rs) = \Phi(r) \cdot \Phi(s)$.

(IV.3) Montrer que $\cdot$ est commutative.

(IV.4) Montrer que $\cdot$ est associative.

(IV.5) Montrer que $\forall A \in \mathcal{R},\ A \cdot A_1 = A$.

(IV.6) Montrer que $\cdot$ est distributive par rapport à $+$,
i.e. $\forall A, B, C \in \mathcal{R},\ A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

(IV.7) Pour $A \in \mathcal{R}$ vérifiant $A > A_0$, on pose

$$A^{-1} \coloneqq \{q/a \;:\; q \in \mathbb{Q},\ q < 1 \text{ et } a \in \mathbb{Q} \setminus A\}$$

et pour $A \in \mathcal{R}$ vérifiant $A < A_0$, on pose $A^{-1} \coloneqq -(-A)^{-1}$.

(IV.7.a) Soit $A \in \mathcal{R}$ tel que $A > A_0$.

(i) Montrer que si $r \in A$ et $r > 0$ alors $\frac{1}{r} \notin A^{-1}$.

(ii) Montrer que si $r \in A^{-1}$ et $r > 0$ alors $\frac{1}{r} \notin A$.

(iii) Soient $x \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < x < 1$. Montrer qu'il existe $\beta \in A$ et $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus A$ tels que $x = \frac{\beta}{\alpha}$.
Indice : on pourra considérer la suite $\left(x^{-n}\right)_{n \geq 1}$ *(resp.* $\left(x^{n-1}\right)_{n \geq 0}$*) si* $x^{-1} \in A$ *(resp.* $x^{-1} \notin A$*).*

(IV.7.b) Montrer que pour $A \in \mathcal{R} \setminus \{A_0\}$, $A^{-1} \in \mathcal{R}$.

(IV.7.c) Montrer que $\forall A \in \mathcal{R} \setminus \{A_0\},\ A \cdot A^{-1} = A_1$.
Indice : pour l'inclusion réciproque, on pourra utiliser la question (IV.7.a).(iii) et justifier qu'il existe $y \in A$ *tel que* $\beta < y$.

(IV.8) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{R},\ A \geq A_0$ et $B \geq A_0 \implies A \cdot B \geq A_0$.

On vient de montrer que $(\mathcal{R}, +, \cdot, A_0, A_1, \leq)$ *est un corps totalement ordonné et Dedekind-complet.*

On a aussi montré que $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathcal{R}$ *est un morphisme injectif de corps ordonnés. En identifiant* $\mathbb{Q}$ *avec* $\Phi(\mathbb{Q})$*, on obtient que* $\mathcal{R}$ *contient une copie de* $\mathbb{Q}$ *qui est dense dans* $\mathcal{R}$ *et que les opérations sur* $\mathcal{R}$ *sont compatibles avec celles sur* $\mathbb{Q}$*. La question suivante montre que cette inclusion est stricte puisqu'il existe une coupure de Dedekind qui n'est pas dans* $\Phi(\mathbb{Q})$ *(à savoir, racine de 2).*

(V) On définit $A_{\sqrt{2}} \coloneqq \{r \in \mathbb{Q} \;:\; r < 0 \text{ ou } r^2 < 2\}$.

(V.1) Montrer que $A_{\sqrt{2}}$ est une coupure de Dedekind.

(V.2) Montrer que $A_0 < A_{\sqrt{2}}$.

(V.3) Le but de cette question est de montrer que $A_{\sqrt{2}} \cdot A_{\sqrt{2}} = A_2$.

(V.3.a) Montrer que $A_{\sqrt{2}} \cdot A_{\sqrt{2}} \subset A_2$.

(V.3.b) Soit $t \in A_2$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $(2-t)n > 1$.

(V.3.c) Montrer qu'il existe $a \in A_{\sqrt{2}}$ et $b \in \mathbb{Q} \setminus A_{\sqrt{2}}$ tels que $b - a = \frac{1}{4n}$.
Indice : on pourra considérer $1 + \frac{k}{4n}$ où $k \in \{0, \dots, 4n\}$.

(V.3.d) En déduire que $2 - a^2 < b^2 - a^2 < 2 - t$.

(V.3.e) Conclure que $t \in A_{\sqrt{2}} \cdot A_{\sqrt{2}}$.

(V.4) En déduire que Φ n'est pas surjective.

Il reste à vérifier qu'il existe un unique corps totalement ordonné Dedekind-complet (à isomorphisme près) : c'est l'objectif de la question suivante.

(VI) On considère $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ un autre corps totalement ordonné et Dedekind-complet. On va construire en plusieurs étapes un isomorphisme $\psi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ de corps qui préserve l'ordre. Pour cela, on pose :

- $\psi(A_0) = 0$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\psi(A_n) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}}$
- Pour $n \in \mathbb{Z}_{<0}$, $\psi(A_n) = -\psi(A_{-n})$
- Pour $q \in \mathbb{Q}$ de la forme $q = \frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\psi(A_q) = \psi(A_a)\psi(A_b)^{-1}$
On remarquera que $1 + 1 + \cdots + 1 > 0$ et que $\psi(A_q)$ ne dépend pas du choix de a et de b.

(VI.1) Montrer que $\forall r, s \in \mathbb{Q}$, $\psi(A_r + A_s) = \psi(A_r) + \psi(A_s)$ et $\psi(A_r \cdot A_s) = \psi(A_r) \cdot \psi(A_s)$.

(VI.2) Pour $A \in \mathcal{R}$, on pose maintenant $\psi(A) = \sup\{\psi(A_q) \;:\; q \in \mathbb{Q},\ A_q < A\}$.

(VI.2.a) Montrer que $\sup\{\psi(A_q) \;:\; q \in \mathbb{Q},\ A_q < A\}$ est bien défini.

(VI.2.b) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies \big(\exists q \in \mathbb{Q},\ x < \psi(A_q) < y\big)$.

(VI.2.c) En déduire que les deux définitions données coïncident lorsque $A = A_q$ pour $q \in \mathbb{Q}$.

(VI.3) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{R},\ A \leq B \implies \psi(A) \leq \psi(B)$.

(VI.4) Montrer que ψ est injective.
Indice : on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathcal{R}$ pour montrer qu'entre deux réels, il y a deux rationnels distincts.

(VI.5) Montrer que ψ est surjective.
Indice : en raisonnant par l'absurde, on pourra montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $x = \psi(M)$ où $M \coloneqq \sup\{A_q \;:\; q \in \mathbb{Q},\ \psi(A_q) < x\}$.

(VI.6) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{R}$, $\psi(A + B) = \psi(A) + \psi(B)$ et $\psi(A \cdot B) = \psi(A) \cdot \psi(B)$.
Indice : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser (VI.2.b).

Remarque C.2. La définition proposée pour $-A$ semble un peu tombée du ciel, expliquons-là. On souhaite définir $B \in \mathcal{R}$ vérifiant $A + B = A_0$, i.e.

$$\{a+b \;:\; a \in A,\, b \in B\} = \{q \in \mathbb{Q} \;:\; q < 0\}.$$

Il est donc naturel de vouloir poser $B \coloneqq \{-r \;:\; r \in \mathbb{Q} \setminus A\}$.
En effet, soient $a \in A$ et $r \in \mathbb{Q} \setminus A$. D'après (A4), il existe $s \in A$ tel que $a < s$.
Puis, d'après la contraposée de (A3), $r \geq s$ d'où $r > a$, i.e. $a - r < 0$.
On a donc bien $A + B \subset A_0$.
Mais il se peut que $\mathbb{Q} \setminus A$ ait un plus petit élément : dans ce cas B admet un plus grand élément et n'est donc pas une coupure (par exemple, si $A = A_2$ alors $\min(\mathbb{Q} \setminus A) = 2$ et $\max(B) = -2$).
Il faut donc corriger la définition pour enlever le plus petit élément de $\mathbb{Q} \setminus A$ s'il existe, et on obtient alors :

$$\begin{aligned} B &\coloneqq \{-r \;:\; r \in \mathbb{Q} \setminus A \text{ et } r \text{ n'est pas le plus petit élément de } \mathbb{Q} \setminus A\} \\ &= \{-r \;:\; r \in \mathbb{Q} \setminus A \text{ et } \exists x \in \mathbb{Q} \setminus A,\, r > x\} \\ &= \{q \in \mathbb{Q} \;:\; -q \notin A \text{ et } \exists x \in \mathbb{Q} \setminus A,\, -x - q > 0\} \\ &= \{q \in \mathbb{Q} \;:\; \exists p \in \mathbb{Q},\, p > 0 \text{ et } -q - p \notin A\} \end{aligned}$$

On justifie la définition de A^{-1} de la même façon. Soit $A \in \mathcal{R}$ tel que $A > A_0$. On souhaite construire $B \in \mathcal{R}$ tel que $A \cdot B = A_1$. Il est naturel de vouloir poser

$$\begin{aligned} B &\coloneqq \{b \in \mathbb{Q} \;:\; b \leq 0 \text{ ou } (b > 0 \text{ et } \forall a \in A,\, a > 0 \implies ab < 1)\} \\ &= \left\{b \in \mathbb{Q} \;:\; b \leq 0 \text{ ou } \left(b > 0 \text{ et } \forall a \in A,\, a > 0 \implies a < \frac{1}{b}\right)\right\} \\ &= \left\{b \in \mathbb{Q} \;:\; b \leq 0 \text{ ou } \left(b > 0 \text{ et } \frac{1}{b} \notin A\right)\right\}. \end{aligned}$$

Cependant, on rencontre le même problème que pour définir $-A$: si $A = A_2$ alors B admet $\frac{1}{2}$ comme plus grand élément. On corrige donc la définition de la façon suivante :

$$\begin{aligned} B &\coloneqq \left\{b \in \mathbb{Q} \;:\; b \leq 0 \text{ ou } \left(b > 0 \text{ et } \frac{1}{b} \notin A \text{ et } \frac{1}{b} \text{ n'est pas le plus petit élément de } \mathbb{Q} \setminus A\right)\right\} \\ &= \{q/a \;:\; q \in \mathbb{Q},\, q < 1 \text{ et } a \in \mathbb{Q} \setminus A\}. \end{aligned}$$

Justifions la dernière égalité.
Si $b \in B$ et $b > 0$ alors il existe $q \in \mathbb{Q} \setminus A$ tel que $q < \frac{1}{b}$ d'où $b = \frac{qb}{q}$ avec $qb < 1$ et $q \notin A$.
Réciproquement si $b = \frac{q}{a}$ avec $0 < q < 1$ (si $q \leq 0$ alors c'est clair) et $a \in \mathbb{Q} \setminus A$ alors $\frac{1}{b} = \frac{a}{q} > a \notin A$ d'où $\frac{1}{b} \notin A$ et $\frac{1}{b}$ n'est pas le plus petit élément de $\mathbb{Q} \setminus A$.

D Développement décimal

Dans cette section, on généralise l'écriture décimal des entiers aux réels. Tout comme pour les entiers, il est possible de définir l'écriture d'un réel en base $b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ (simplement en remplaçant 10 par b ci-dessous). Cependant, nous nous restreignons à l'écriture décimal, c'est-à-dire en base 10.

Le lemme suivant sera utile à plusieurs reprises dans cette section. Il s'agit d'une conséquence de la complétude au sens de Dedekind qui stipule que toute suite de chiffres est le développement décimal d'un nombre réel (i.e. il n'y a pas de "trou", de nombre manquant, dans $\mathbb{R}$ ***TODO :*** *élaborer*).

Lemme D.1. *Soit $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite telle que $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_k \in \{0,1,\dots,9\}$. Alors la série*

$$S := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

est convergente et $S \geq 0$.

Démonstration. Par comparaison, il suffit de remarquer que $0 \leq \frac{a_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^k}$ et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}$ est une série convergente (série géométrique de raison $\frac{1}{10} < 1$). ■

Remarque D.2. Le développement décimal d'un réel n'est pas unique puisque

$$0.9999\ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1.000\ldots.$$

Afin d'obtenir l'unicité du développement décimal, nous allons proscrire les développements se terminant par une infinité de 9.

Définition D.3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que

$$\lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

est le *développement décimal propre* de x si

(i) $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_k \in \{0,1,\dots,9\}$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq x - \lfloor x \rfloor < \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$.

Proposition D.4. *Si $\lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ est le développement décimal propre de $x \in \mathbb{R}$ alors*

1. $x = \lfloor x \rfloor + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$
2. $\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\exists k > N$, $a_k \neq 9$.

On notera alors $x = \lfloor x \rfloor . a_1 a_2 a_3 \ldots$.

Le dernier point énonce simplement que le développement décimal propre de x ne se termine pas par une infinité de 9.

Démonstration.

1. Nous avons déjà montré que $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ est convergente.
   On déduit donc de D.3.(ii) que $S \leq x - \lfloor x \rfloor \leq S$ et ainsi $x = \lfloor x \rfloor + S$.
2. Supposons par l'absurde qu'il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\forall k > N$, $a_k = 9$.
   Alors $x - \lfloor x \rfloor = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^N}$.
   On obtient ainsi une contradiction avec (l'inégalité stricte de) D.3.(ii).

■

Théorème D.5. *Un réel $x \in \mathbb{R}$ admet un unique développement décimal propre.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quitte à remplacer x par $x - \lfloor x \rfloor$, on peut supposer que $\lfloor x \rfloor = 0$. On va raisonner par analyse-synthèse.

Supposons que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ soit un développement décimal propre de x.

Alors, d'après D.3.(ii), on a

$$a_n \leq 10^n \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} \right) < a_n + 1.$$

Ainsi la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ vérifie nécessairement $a_1 = \lfloor 10x \rfloor$ et $a_{n+1} = \left\lfloor 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right) \right\rfloor$.

On a bien unicité ; il reste à vérifier que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ convient.

(i) Puisque $\lfloor x \rfloor = 0$, on a que $0 \leq x < 1$.
Donc $0 \leq 10x < 10$ et ainsi $a_1 = \lfloor 10x \rfloor \in \{0, 1, \dots, 9\}$.
Si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors

$$0 \leq 10^n \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} \right) - a_n < 1.$$

Donc

$$0 \leq 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right) < 10.$$

Et ainsi $a_{n+1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

(ii) Par construction, on a bien que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$.

■

Remarque D.6. Il est facile de déterminer le développement décimal d'un nombre rationnel. En effet, supposons que $x \coloneqq \frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Alors, par division euclidienne, $a = bq_0 + r_0$ où $0 \leq r_0 < b$. Donc $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b}$ et $q_0 = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.
Toujours par division euclidienne, il vient $10r_0 = bq_1 + r_1$ où $0 \leq r_1 < b$.
Et on répète ce procédé : $10r_k = bq_{k+1} + r_{k+1}$ où $0 \leq r_{k+1} < b$.
Puisqu'il y a seulement b restes possibles, d'après le principe des tiroirs de Dirichlet, le procédé décrit ci-dessus boucle après au plus b étapes.
On vérifie aisément que $q_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ est le développement décimal propre de x.

Définition D.7. On dit qu'un développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang si
$$\exists r \in \mathbb{N},\ \exists s \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall k \in \mathbb{N},\ a_{r+k+s} = a_{r+k}.$$
Cela signifie que
$$\begin{aligned} x &= \lfloor x \rfloor . b_1 b_2 \dots b_r \underline{c_1 c_2 \dots c_s} \\ &:= \lfloor x \rfloor . b_1 b_2 \dots b_r c_1 c_2 \dots c_s c_1 c_2 \dots c_s c_1 \dots . \end{aligned}$$
La périodicité commence au rang $r+1$ et est de période s.

Exemple D.8. Cherchons le développement décimal de $\frac{1529327}{24975}$.

(1) $1529327 = 24975 \times 61 + 5852$
(2) $58520 = 24975 \times 2 + 8570$
(3) $85700 = 24975 \times 3 + 10775$
(4) $107750 = 24975 \times 4 + 7850$
(5) $78500 = 24975 \times 3 + 3575$
(6) $35750 = 24975 \times 1 + 10775$

On trouve donc que $\frac{1529327}{24975} = 61.234\underline{314}$.

Théorème D.9. *Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.*

Démonstration.
$\Rightarrow$: c'est exactement la Remarque D.6.
$\Leftarrow$: Supposons que $x := \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ soit éventuellement périodique,
i.e. $\exists r \in \mathbb{N},\ \exists s \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall k \in \mathbb{N},\ a_{r+k+s} = a_{r+k}$.
Alors $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{r} \frac{a_k}{10^k} + 10^{-r} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{r+k}}{10^k}$.
Il suffit donc de montrer que $y := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{r+k}}{10^k} \in \mathbb{Q}$. Pour cela, remarquons que $10^s y = N + y$ où $N := \overline{a_{r+1} a_{r+2} \dots a_{r+s}}^{10} \in \mathbb{N}$. Ainsi $y = \frac{N}{10^s - 1} \in \mathbb{Q}$. ∎

Remarque D.10. D'après la démonstration précédente, on a :
$$\begin{aligned} a_t a_{t-1} \dots a_0 . b_1 b_2 \dots b_r \underline{c_1 c_2 \dots c_s} &= \overline{a_t a_{t-1} \cdots a_0}^{10} + \sum_{k=1}^{r} \frac{b_k}{10^k} + 10^{-r} \frac{\overline{c_1 c_2 \dots c_s}^{10}}{10^s - 1} \\ &= \overline{a_t a_{t-1} \dots a_0}^{10} + \frac{\overline{b_1 b_2 \dots b_r}^{10}}{10^r} + \frac{\overline{c_1 c_2 \dots c_s}^{10}}{10^{r+s} - 10^r} \\ &= \frac{\overline{a_t a_{t-1} \dots a_0 b_1 b_2 \dots b_r c_1 c_2 \dots c_s}^{10} - \overline{a_t a_{t-1} \dots a_0 b_1 b_2 \dots b_r}^{10}}{10^{r+s} - 10^r} \end{aligned}$$

Exemple D.11.

- $61.234\underline{314} = \frac{61234314 - 61234}{10^6 - 10^3} = \frac{61173080}{999000}$
- $0.\underline{3} = \frac{3-0}{10-1} = \frac{3}{9}$
- $42.\underline{012} = \frac{42012 - 42}{10^3 - 1} = \frac{41970}{999}$

Exemple D.12. Le nombre $x \coloneqq \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-\frac{n(n+1)}{2}} = 0.101001000100001000001\dots$ n'est pas rationnel.

Notons les décimales de x par $(a_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, de sorte que $a_k = 1$ s'il existe $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que $k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $a_k = 0$ sinon.
Soient $r \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
Alors, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $r + k > \frac{s(s+1)}{2}$ et $a_{r+k} = 1$. Donc $a_{r+k+s} = 0 \neq 1 = a_{r+k}$.
Ainsi, le développement décimal de x n'est pas périodique et $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. ***TODO :*** *détailler*

E Non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$

Théorème E.1. *Il n'existe pas de surjection $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

Démonstration par l'argument diagonal de Cantor.
Considérons une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que $f(n)$ admet un unique développement décimal propre

$$f(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{nk} 10^{-k}$$

où $a_{n0} \in \mathbb{Z}$ et $a_{nk} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour $k \geq 1$, i.e.

$$\begin{array}{l} f(0) = \color{red}{a_{00}} \,.\, a_{01}\ a_{02}\ a_{03}\ a_{04}\ a_{05}\ \cdots \\ f(1) = a_{10} \,.\, \color{red}{a_{11}}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ \cdots \\ f(2) = a_{20} \,.\, a_{21}\ \color{red}{a_{22}}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}\ \cdots \\ f(3) = a_{30} \,.\, a_{31}\ a_{32}\ \color{red}{a_{33}}\ a_{34}\ a_{35}\ \cdots \\ f(4) = a_{40} \,.\, a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ \color{red}{a_{44}}\ a_{45}\ \cdots \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $b_k \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{if } a_{kk} = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$. Alors $b \coloneqq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k 10^{-k}$ est un nombre réel dont le développement décimal propre est donné par la suite (b_k).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) \neq b$ puisque $b_n \neq a_{nn}$ (unicité du développement décimal propre).
Donc b n'est pas dans l'image de f et ainsi f n'est pas surjective. ∎

F Fractions continues

TODO

G Alphabet grec

A	α	Alpha	I	ι	Iota	P	ρ ϱ	Rhô
B	β	Bêta	K	κ	Kappa	Σ	σ ς	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	Mu	Υ	υ	Upsilon
E	ϵ ε	Epsilon	N	ν	Nu	Φ	ϕ φ	Phi
Z	ζ	Zêta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Khi
H	η	Êta	O	o	Omicron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ ϑ	Thêta	Π	π ϖ	Pi	Ω	ω	Oméga