

Analyse approfondie



Sommaire

1	Axiome de la borne sup, caractérisation avec ε	1
2	Voisinages, $\overline{\mathbb{R}}$, définition unifiée de la limite	3
3	Opérations sur les limites, encadrement	5

1. Axiome de la borne sup, caractérisation avec ε

Le corps ordonné $\mathbb{R}$, sup et inf

On a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ avec la construction de $\mathbb{R}$ basée sur l'écriture décimale. Pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$,

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\dots = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots$$

avec

- $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ donné par $p = \alpha_0 q + r_0$, $0 \leq r_0 < q$
- $\alpha_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ donné par $10r_0 = \alpha_1 q + r_1$, $0 \leq r_1 < q$
- $\alpha_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ donné par $10r_1 = \alpha_2 q + r_2$, $0 \leq r_2 < q$
- ...

Proposition 1.1. *Un nombre réel est rationnel si et seulement si son écriture décimale est périodique.*

Démonstration. Si $x = p/q$, on utilise la division euclidienne pour montrer que l'écriture décimale est périodique (à partir d'un certain rang). Si

$$p = a_0 q + r_1, \quad 0 \leq r_1 < q,$$

alors

$$10r_1 = a_1 q + r_2 \quad 0 \leq r_2 < q,$$

et ainsi de suite. Après $k \leq q$ divisions, on arrive à l'existence d'un $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ tel que $r_{k+1} = r_j$.

Réciproquement il faut utiliser la somme infinie d'une série géométrique de raison $r \in]0, 1[$.

□

Remarque 1.2. L'écriture périodique avec des décimales toutes nulles est équivalente à celle ayant seulement des 9 (à partir d'un certain rang). **C'est le seul cas d'écriture non unique.** L'argument est basé sur l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{10^k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1,$$

avec égalité si et seulement si $a_k = 9$ pour tout k .

Exercice 1 (devoir). Donner l'écriture décimale de $\frac{199}{990}$.

Tout sous-ensemble majoré admet une borne sup, le plus petit majorant

Définition. Le sous-ensemble non-vidé $A \subset \mathbb{R}$ est dit *borné supérieurement* (ou majoré) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a $x \leq M$. Le réel M est dit *majorant* de A .

Lemme-Définition 1.3. Si $A \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble non-vidé et majoré, alors $\sup A$, le plus petit majorant de A , existe et est appelé la borne sup de A .

Pour une idée de preuve (c'est-à-dire de construction), voir l'exercice 6 de la feuille no 1.

Proposition 1.4. Soit $A \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble non-vidé et majoré. Les affirmations suivantes sont équivalentes pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\alpha = \sup A$, c'est-à-dire α est le plus petit majorant
2. • $\forall a \in A$ on a $a \leq \alpha$, et
• $\forall \varepsilon > 0 \exists a_\varepsilon \in A$ tel que $-\varepsilon + \alpha < a_\varepsilon$.

Démonstration. L'implication directe est à faire en TD.

Pour la réciproque, c'est-à-dire 2. $\implies$ 1., la première condition de 2. dit que α est un majorant. On suppose par l'absurde qu'il existe μ un autre majorant de A tel que $\mu < \alpha$. On applique la deuxième condition de 2. avec

$$\varepsilon = \frac{\alpha - \mu}{2} > 0.$$

On a l'existence de $a_\varepsilon \in A$ tel que

$$-\varepsilon + \alpha < a_\varepsilon.$$

On en déduit que

$$\mu < \frac{\alpha + \mu}{2} = -\varepsilon + \alpha < a_\varepsilon$$

ce qui contredit l'hypothèse "il existe μ majorant de A tel". □

Exercice 2 (voir l'exercice 4 de la feuille 1). Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que $\inf A = m$, $\sup A = M$ et $m, M \notin A$ et $m \neq M$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < M - m$, il existe $a'_\varepsilon, a''_\varepsilon \in A$ tels que

$$a''_\varepsilon - a'_\varepsilon > (M - m) - \varepsilon.$$

Exercice 3. Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que $\sup A = 1$ et $1 \notin A$.

1) Montrer qu'il existe a_1, a_2 et a_3 des éléments de A , deux à deux différents, tels que $\sum_1^3 a_k \geq 2$.

2) Montrer qu'il existe $(a_k)_1^4$ des éléments de A , deux à deux différents, tels que $\sum_1^4 a_k \geq 3$.

3*) Quelle est l'affirmation pour un entier n quelconque ? Démontrer cette affirmation.

2. Voisinages, $\overline{\mathbb{R}}$, définition unifiée de la limite

Voisinages, ouverts et fermés de $\mathbb{R}$

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}$. Un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est dit voisinage de a s'il existe $\eta > 0$ tel que $] -\eta + a, a + \eta[\subset V$.

$\mathcal{V}(a)$ désigne l'ensemble de tous les voisinages de a .

Lemme 2.1. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(a)$, alors $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a)$.

Démonstration. Soient $\eta_1, \eta_2 > 0$ tels que

$$]-\eta_1 + a, a + \eta_1[\subset V_1 \quad \text{et} \quad]-\eta_2 + a, a + \eta_2[\subset V_2.$$

Alors, si $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on a

$$]-\eta + a, a + \eta[\subset V_1 \cap V_2,$$

car l'intervalle $] -\eta + a, a + \eta[$ est contenu dans les deux voisinages. $\square$

Remarque. Si on note $B_\eta(a) =] -\eta + a, a + \eta[$, l'écriture se simplifie un peu, et, surtout, la discussion se généralise à $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.2. Un ensemble X muni d'un ensemble de voisinages pour chacun de ces points vérifiant cinq propriétés¹ dont celle établie par le lemme précédent (l'intersection de deux voisinages), est un *espace topologique*. On dit que le système des voisinages définit une *topologie* sur X .

La topologie définie sur $\mathbb{R}$ par les voisinages contenant des intervalles ouverts symétriques centrés en chaque $a \in \mathbb{R}$ (des boules ouvertes) est appelée *topologie usuelle*.

Définition. Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$ est dit *ouvert* (pour la topologie usuelle) si pour tout $x \in \Omega$ on a $\Omega \in \mathcal{V}(x)$. Un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}$ est dit *fermé* si $\mathbb{R} \setminus F$ est ouvert.

Exercice 4 (voir l'exercice 8 de la feuille 1). Montrer qu'un intervalle ouvert est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Ayant $\mathbb{R}$ avec la topologie usuelle, on définit les voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$:

1. (i) si $V \in \mathcal{V}(a)$ alors $a \in V$; (ii) si $V \in \mathcal{V}(a)$ et si $V \subset W$, alors $W \in \mathcal{V}(a)$; (iii) si $V, W \in \mathcal{V}(a)$ alors $V \cap W \in \mathcal{V}(a)$; (iv) $X \in \mathcal{V}(a)$ pour tout a ; (v) si $V \in \mathcal{V}(a)$ alors il existe $W \subset V$ tel que $W \in \mathcal{V}(a)$ et pour tout $x \in W$ on a $V \in \mathcal{V}(x)$.

Définition 2.3. V est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]A, +\infty[\subset V$ (resp. $] -\infty, A[\subset V$).

De manière plus conceptuelle, en définissant $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on obtient une topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$ qui induit la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ comme sous-ensemble. Par la suite, on n'utilisera pas ce point de vue. Mais on parlera de $\overline{\mathbb{R}}$ et de $\pm\infty$ comme points d'accumulation pour un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$.

Exemple 2.4. Pour $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $+\infty$ est le seul point d'accumulation (voir la section suivante).

Points d'accumulation et limites

Définition. Soit $S \subset \mathbb{R}$. Un point $a \in \mathbb{R}$ est dit *point d'accumulation* de S si

$$\text{pour tout } V \in \mathcal{V}(a) \text{ on a } (V \setminus \{a\}) \cap S \neq \emptyset.$$

La définition fonctionne pour $\pm\infty$. De plus, on pourrait introduire la notion et notation de *voisinage épointé* : si $V \in \mathcal{V}(a)$, alors $V_a := V \setminus \{a\}$. La définition du point d'accumulation devient

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \text{ on a } V_a \cap S \neq \emptyset.$$

Lemme 2.5. a est un point d'accumulation pour S si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_n$ dans $S \setminus \{a\}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$.

La preuve est laissée en devoir. Voir aussi l'exercice 10 de la feuille 1.

Versions de la définition de la limite d'une fonction ; on arrive à une forme suffisamment générale pour couvrir tous les cas de limites de fonctions réelles et la limite d'une suite.

- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation pour D . On dit que f admet la limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in D \quad \text{et} \quad 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \quad \text{on a} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation pour D . On dit que f admet la limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si

$$\forall W \in \mathcal{V}(\ell) \quad \exists V_W \in \mathcal{V}(a) \quad \text{tel que} \quad f(V_{W,a} \cap D) \subset W.$$

— Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point d'accumulation pour D . On dit que f admet la limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a si

$$\forall W \in \mathcal{V}(\ell) \quad \exists V_W \in \mathcal{V}(a) \quad \text{tel que} \quad f(V_{W,a} \cap D) \subset W.$$

Interprétation de la définition pour les suites : La suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geq N(\varepsilon) \quad \text{on a} \quad |x_n - \ell| < \varepsilon.$$

Exercice 5 (voir l'exercice 14 de la feuille no 1). En interprétant la notion de voisinage et de point d'accumulation, donner des définitions explicites (en ε et $\delta(\varepsilon)$) de

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell$$

quand p est un point fini ou infini et ℓ est une valeur finie ou infinie.

3. Opérations sur les limites, encadrement

Dans cette section D sera un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point d'accumulation de D . Les fonctions seront à valeurs réelles et définies sur D .

Lemme 3.1. *Si f admet une limite finie en a , alors f est bornée sur un voisinage (épointé) de a .*

L'énoncé doit être compris (en ε et δ) de la manière suivante : Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite finie en a (point d'accumulation de D), alors

$$\exists M > 0, \exists \delta_0 > 0 \quad \text{tels que} \quad \forall x, x \in D \cap]-\delta_0 + a, a + \delta_0[\implies |f(x) - l| \leq M.$$

Démonstration. Suivre les étapes ci-dessous pour établir une preuve.

— Écrire la définition de $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

— Prendre $\varepsilon = 1$ pour obtenir

$$|f(x) - l| < 1$$

pour tout $x \in D \cap]-\delta(1) + a, a + \delta(1)[$, $x \neq a$.

C'est sur le voisinage épointé que le résultat est utilisé dans la proposition 3.2.

— Si $a \in D$, prendre $M = 1 + |f(a)| + l$ pour finir l'argument.

□

Proposition 3.2. *Si $f_j(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 1, 2$, alors $f_1(x) f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 \ell_2$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |f_1(x) f_2(x) - \ell_1 \ell_2| &\leq |f_1(x) - \ell_1| |f_2(x)| + |\ell_1| |f_2(x) - \ell_2| < \varepsilon(|\ell_2| + 1) + |\ell_1| \varepsilon \\ &= (|\ell_1| + |\ell_2| + 1) \varepsilon \end{aligned}$$

dès que x vérifie $|x - a| < \delta_1(\varepsilon)$ et $|x - a| < \delta_2(\varepsilon)$ quand $\varepsilon < 1$. On prend donc

$$\delta(\varepsilon) = \min \left(\delta_1 \left(\frac{\varepsilon}{|\ell_1| + |\ell_2| + 1} \right), \delta_2 \left(\frac{\varepsilon}{|\ell_1| + |\ell_2| + 1} \right) \right).$$

□

Théorème 3.3 (Encadrement). *Soient $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point d'accumulation pour D . Si*

- 1) *pour tout $x \in D$, $x \neq a$ on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, et*
- 2) *$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$*

alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

Démonstration. Quand a est réel, on a

$$-\varepsilon + \ell < f(x) \leq g(x) < h(x) < \ell + \varepsilon$$

dès que $|x - a| < \delta_f(\varepsilon)$ et $|x - a| < \delta_h(\varepsilon)$. En prenant $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_f(\varepsilon), \delta_h(\varepsilon))$, on obtient que la limite de g en a est ℓ . $\square$

Remarque. La preuve utilisant les voisinages est plus simple dans ce cas et fonctionne dans tous les cas.

Exercice. Écrire l'énoncé et la preuve quand $\ell = +\infty$.

Proposition 3.4. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Si f est croissante et majorée, alors

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup f =: \bar{f}.$$

Esquisse de preuve. On suppose $b \in \mathbb{R}$. (Comment doit-on modifier l'argument si $b = +\infty$?) Soit $\varepsilon > 0$. Utiliser la caractérisation de $\sup f \in \mathbb{R}$ pour trouver $y_\varepsilon \in \text{im}(f)$ tel que

$$-\varepsilon + \sup f < y_\varepsilon \leq \sup f.$$

Si $f(x_\varepsilon) = y_\varepsilon$, on prend

$$\delta(\varepsilon) = b - x_\varepsilon.$$

$\square$

Corollaire 3.5. Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente vers sa borne sup (resp. inf).

Proposition 3.6. Soit (I_n) une suite d'intervalles emboîtés, $I_n = [a_n, b_n]$. Alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [a, b],$$

où $a = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ et $b = \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$.

Démonstration. Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont monotones et bornées. D'après le corollaire précédent, elles convergent vers a et respectivement b . Il s'ensuit que

$$[a, b] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Pour finir, il reste à établir l'autre inclusion. Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. On suppose par l'absurde que $x < a$. Alors, d'après la définition de la borne sup, il existe n_0 tel que

$$x < a_{n_0} \leq a.$$

Alors $x \notin I_{n_0}$. On est arrivé à une contradiction. $\square$

Remarque. L'exemple $I_n = \left] 0, \frac{1}{n} \right]$ montre que la compacité des intervalles I_n est nécessaire.

Bibliographie

- [1] J.-Ph. Rolin, <https://rolin.perso.math.cnrs.fr/math1a/Math1A%20-%20Cours.pdf>