

Analyse approfondie – 2025-2026

CONTRÔLE CONTINU N° 2
15 DÉCEMBRE 2025 — 14:00-16:30

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone, ...) n'est autorisé.

Le 2*) de l'exercice 6 est un peu plus compliqué par rapport aux autres questions de l'examen et représente un point du total de 20 points.

Exercice 1.

- 1) Donner la définition en ε et δ de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$.
- 2) Calculer la limite en $+\infty$ de S_n où $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k(n+k)}{n^3}$.
- 3) Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^3) dx < \frac{\pi^4}{2^6}.$$

(*Indication* : Au cas où aucune idée ne s'impose à vous, on pourrait commencer par esquisser le graphe de sinus sur $[0, \pi]$ ainsi que la droite tangente à ce graphe au point d'abscisse $x = 0$.)

Solution.

- 1) La définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, en symboles, est

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in D_f, \quad x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

- 2) On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k(n+k)}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right) \\ &= \int_0^1 (x + x^2) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

- 3) On a l'inégalité $\sin x^3 \leq x^3$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, avec égalité si et seulement si $x = 0$. Alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^3 dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^4}{2^6}.$$

Remarque. Cette inégalité peut être améliorée car la fonction $x \mapsto x^3$ prend des valeurs supérieures à 1 quand $x > 1$. En bornant $\sin x^3$ par x^3 sur $[0, 1]$ et puis par 1 quand $x \geq 1$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^3 dx < \int_0^1 x^3 dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + [x]_1^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}.$$

Peut-on améliorer cette nouvelle inégalité en considérant le deuxième terme de la borne utilisée dans le calcul précédent ?

Exercice 2.

- 1) En utilisant un changement de variable (on voudrait “faire disparaître” la racine), calculer

$$J = \int_0^3 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

- 2) En utilisant l’intégration par parties pour établir une formule de récurrence, calculer

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx.$$

(*Indication*: On pourrait commencer par remarquer que $\cos^{2n} x = \cos x \cdot \cos^{2n-1} x$.)

Solution.

- 1) Avec le changement de variable $1 + \sqrt{x} = t$, c’est-à-dire

$$x = (t-1)^2 \quad \text{et} \quad dx = 2(t-1) \, dt,$$

on a

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} &= \int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{2(t-1)}{t} \, dt = 2 \int_1^{1+\sqrt{3}} dt - 2 \int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{dt}{t} \\ &= 2\sqrt{3} - 2 \ln(1 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - \ln(4 + 2\sqrt{3}). \end{aligned}$$

- 2) En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \cos^{2n-1} x \, dx \\ &= \left[\sin x \cos^{2n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (\cos^{2n-1} x)' \, dx \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x ((2n-1) \cos^{2n-2} x (-\sin x)) \, dx \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{2n-2} x \, dx = (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^{2n-2} x \, dx \\ &= (2n-1) I_{2n-2} - (2n-1) I_{2n}. \end{aligned}$$

Il s’ensuit que

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2},$$

c’est-à-dire

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2n)!}{n!^2 2^{2n}} \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3. On considère la fonction $f : [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$. Dans le système de coordonnées $Oxyz$, on note X le solide de révolution obtenu en tournant le graphe de f (c’est-à-dire la courbe définie par $y = f(x)$ dans le plan $z = 0$) autour de l’axe Ox et délimité par les plans $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$. Calculer son volume $v(X)$. (*Indication*: Dans l’intégrale qu’on est amené à calculer, on pourrait multiplier en haut et en bas la fraction à intégrer par $\cos x$ pour identifier un changement de variable.)

Solution.

On a

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \sin x}{1 - \sin^2 x}$$

donc, en mettant $t = \sin x$,

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{\pi}{2} \left[\ln \frac{1+t}{1-t} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = \pi \ln(\sqrt{2}+1).$$

Exercice 4. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier soigneusement vos réponses (avec des arguments ou des contre exemples).

- 1) Il existe une fonction continue et bijective $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$.
- 2) Une fonction continue $h : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ atteint ses bornes.
- 3) Il existe une fonction continue et bijective $g :]-1, 1[\rightarrow [-\pi, \pi]$.

Solution.

- 1) Oui ! La fonction \tan réalise une bijection continue (à vrai dire \mathcal{C}^∞ ou analytique) entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et \mathbb{R} .
- 2) Non. La fonction $f(x) = x$ définie sur $[0, 1[$ n'atteint pas la borne sup de son ensemble de valeurs qui est $[0, 1[$.
- 3) Non. Si une telle fonction g existait, alors g^{-1} réaliseraient une bijection continue entre $[-\pi, \pi]$ et $]-1, 1[$. Mais une fonction continue sur un intervalle fermé et borné atteint ses bornes, c'est-à-dire son ensemble des images est un intervalle fermé et borné. Mais l'ensemble des images de g^{-1} serait $]-1, 1[$, d'où une contradiction.

Exercice 5. Soit $f :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$.

- 1) Esquisser le graphe de f .
- 2) Exprimer en utilisant ε et δ la phrase f n'est pas uniformément continue.
- 3) Justifier que f n'est pas uniformément continue.

Solution.

- 1) On a $f'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$, c'est-à-dire f' s'annule en 0 et son signe est le même que celui de x . On a le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	–	0	–
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

De plus, f admet la droite $y = -x - 1$ comme asymptote oblique à $-\infty$ et la droite $x = 1$ comme asymptote verticale en 1^- . L'esquisse de la courbe représentative est réalisée dans la figure 1.

- 2) La fonction f n'est pas uniformément continue si

$\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \delta > 0 \quad \exists x'_\delta, x''_\delta \in]-\infty, 1[$ tels que $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$ et $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

- 3) Il suffit de vérifier l'affirmation précédente pour $\delta = \frac{1}{n}$, c'est-à-dire de démontrer que

$\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists u_n, v_n \in]-\infty, 1[$ tels que $|u_n - v_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon_0$.

On prend,

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = 1 - \frac{1}{2n}.$$

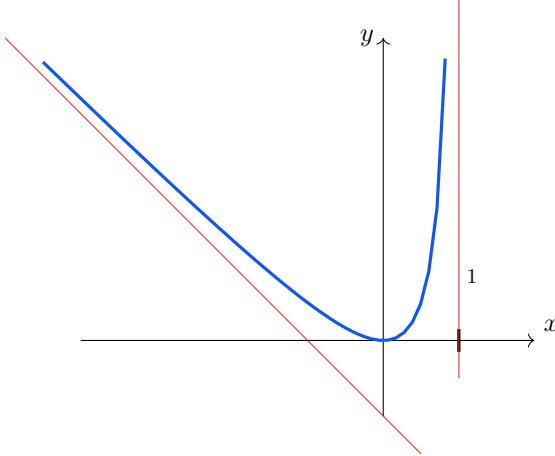


Figure 1: Le graphe de f ; la non continuité uniforme est due au comportement de f dans le voisinage de 1^- .

Alors

$$\begin{aligned}
 |f(u_n) - f(v_n)| &= f(v_n) - f(u_n) = \frac{(1 - \frac{1}{2n})^2}{\frac{1}{2n}} - \frac{(1 - \frac{1}{n})^2}{\frac{1}{n}} \\
 &= 2n \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}\right) - n \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
 &= 2n - 2 + \frac{1}{2n} - n + 2 - \frac{1}{n} \\
 &= n - \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On prend $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$.

Remarque. Plusieurs étudiants ont invoqué le résultat suivant: *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$. Alors f n'est pas uniformément continue.*

Une preuve de ce résultat aurait été nécessaire.¹ La démonstration de ce résultat (voir ci-dessous) est plus complexe que l'argument dans le cas particulier de la fonction rationnelle de l'exercice. De plus, le résultat "complet" est le suivant: *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. La fonction f est uniformément continue si et seulement si elle a une limite finie en b .*

Démonstration. On prend $\varepsilon_0 = 1$. On veut démontrer que pour tout $\delta > 0$, il existe $x'_\delta, x''_\delta \in [a, b]$ tels que $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$ et $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq 1$.

Soit $\delta > 0$. On pose $M = f(1 - \delta)$. Comme $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$, il existe

- $\eta_M > 0$ tel que pour tout x qui satisfait $-\eta_M + 1 < x < 1$ on a $f(x) > M$
- $\eta > 0$ tel que pour tout x qui satisfait $-\eta + 1 < x < 1$ on a $f(x) > \max(f(1 - \eta_M), M) + 1$.

On prend

$$x'_\delta = \max(1 - \delta, 1 - \eta_M) \quad \text{et} \quad x''_\delta = \max(1 - \delta, 1 - \eta).$$

Alors, d'après la définition de η ,

$$f(x''_\delta) \geq f(x'_\delta) + 1$$

¹Comme le résultat n'a pas été établi en cours et comme l'examen se proposait de vérifier vos capacités de rédiger des arguments avec des quantificateurs, l'invoquer seulement n'était pas suffisant pour recevoir le nombre maximal de points.

et donc

$$|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| = f(x''_\delta) - f(x'_\delta) \geq 1.$$

□

DEVOIR. Écrire cette preuve en utilisant les suites. Écrire la preuve de l'équivalence énoncée plus haut.

Exercice 6. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier soigneusement vos réponses (avec des arguments ou des contre exemples).

1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit $\Delta = [a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b]$ une subdivision de $[a, b]$. L'inégalité suivante entre les sommes de Darboux est toujours vérifiée,

$$\underline{\sigma}_\Delta(f) \leq \bar{\sigma}_\Delta(f).$$

2*) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit Δ la subdivision de $[a, b]$ formée avec les points a , $\frac{a+b}{2}$ et b . On pose $S = \bar{\sigma}_\Delta(f)$. L'affirmation

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists c = c_\varepsilon \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad \exists d = d_\varepsilon \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \quad \text{tels que} \quad (f(c) + f(d)) \frac{b-a}{2} > S - \varepsilon$$

est toujours vérifiée.

Solution.

1) On a

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_\Delta(f) &= \sum_{j=0}^{n-1} \inf \left\{ f(x) \mid x \in [x_j, x_{j+1}] \right\} (x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \sup \left\{ f(x) \mid x \in [x_j, x_{j+1}] \right\} (x_{j+1} - x_j) = \bar{\sigma}_\Delta(f). \end{aligned}$$

2) D'après la définition,

$$S = \bar{\sigma}_\Delta(f) = \sup_{x \in [a, \frac{a+b}{2}]} f(x) \frac{b-a}{2} + \sup_{x \in [\frac{a+b}{2}, b]} f(x) \frac{b-a}{2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la borne sup, il existe $c_\varepsilon \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ tel que

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \sup_{x \in [a, \frac{a+b}{2}]} f(x) < f(c_\varepsilon) \leq \sup_{x \in [a, \frac{a+b}{2}]} f(x)$$

et il existe $d_\varepsilon \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ tel que

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \sup_{x \in [\frac{a+b}{2}, b]} f(x) < f(d_\varepsilon) \leq \sup_{x \in [\frac{a+b}{2}, b]} f(x).$$

Pour finir, on multiplie par $\frac{b-a}{2}$ les deux inégalités de gauche et on les additionne.

Barème indicatif: 4 — 4 — 2 — 4 — 4 — 2