Analyse approfondie – 2026-2027

Contrôle continu n° 1
22 octobre, 2026 — 11 : 00 – 12 : 30

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone, ...) n'est autorisé.
Il faut **marquer votre groupe** sur la copie dans le coin en haut à droite.

Exercice 1. Énoncer, en utilisant le formalisme ε-δ. chacune des notions ci-dessous.

1) $F :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ n'est pas injective
2) $S \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré

Solution.

1) $\exists y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\text{card}(f^{-1}(\{y_0\})) \geq 2$
2) $\forall M > 0$, $\exists x_M \in S$ tel que $x_M > M$.

Exercice 2. On considère le sous-ensemble

$$A = \left\{ 2 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Les réponses aux questions suivantes doivent être justifiées.

1) Déterminer $\sup A$. Est-ce que le $\max A$ existe-t-il ?
2) Montrer que 2 est le seul point d'accumulation de A.
3) Quels sont les points d'adhérence de A ?

Solution.

1) La suite $(2 - 1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et majorée (par 2). Alors, comme A est l'ensemble des éléments de la suite,

$$\lim_{n\to+\infty} (2 - 1/n) = 2 = \sup A.$$

2) En général, a est un point d'accumulation de $A \subset \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_n$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in A \setminus \{a\} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$

Comme l'ensemble A est composé de tous les éléments de la suite $(2-1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et comme celle-ci tend vers 2, on en déduit que 2 est le seul point d'accumulation de A.

3) L'ensemble des points d'adhérence de A est l'union de l'ensemble des points d'accumulation de A et des points isolés de A, ou encore de A et de ces points d'accumulation. En particulier,

$$\overline{A} = A \cup \{2\}.$$

Exercice 3. Soient $f, g :]0, +\infty[$ telles que leurs limites en $+\infty$ existent et sont égales à l et respectivement m, avec $l, m \in \mathbb{R}$. Démontrer en utilisant le formalisme ε-δ que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = l + m.$$

Solution.
On interprète les définitions des deux limites.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$: $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_f(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > \delta_f(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = m$: $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_g(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > \delta_g(\varepsilon) \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > \delta(\varepsilon) \implies |(f(x) + g(x)) - (l + m)| < \varepsilon.$$

Comme

$$|(f(x) + g(x)) - (l + m)| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m|,$$

il suffit de prendre

$$\delta(\varepsilon) = \max\left(\delta_f\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big), \delta_g\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)\right).$$

Alors, pour $x > \delta(\varepsilon)$, on a

$$|(f(x) + g(x)) - (l + m)| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Exercice 4. Démontrer en utilisant le formalisme ε-δ que $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Solution.
Il faut démontrer que

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in]0, +\infty[\,, \ x > \delta(M) \implies \ln x > M.$$

Soit $M > 0$. On prend $\delta(M) = e^M$. Alors pour $x > e^M$ on a

$$\ln x > \ln e^M = M.$$

Remarque. Le raisonnement est basé sur la fonction exponentielle. Si on veut le placer à un niveau plus élémentaire, il faut utiliser une définition du logarithme. Par exemple

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Alors, pour trouver un $\delta(M)$, on s'appuie sur des inégalités : pour $x > 2^n$, on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t} > \int_1^n \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \geq \sum_{k=1}^{2^n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Pour finir, on utilise les inégalités basées sur les puissances de 2 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} \\
&= \frac{n}{2} \overset{?}{>} M.
\end{aligned}$$

On prend

$$\delta(M) = 2^{\lfloor 2M \rfloor + 1}.$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui satisfait la propriété $\mathcal{U}$,

$$\mathcal{U} : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad |x - x'| < \eta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{U}$ implique la continuité de f en a.

2) Écrire la négation de $\mathcal{U}$.

3) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2$ ne vérifie pas la propriété $\mathcal{U}$.

Solution.

1) On prend $x' = a$ dans $\mathcal{U}$ et on obtient la continuité de f en a.

2) La négation de $\mathcal{U}$ est

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall \eta > 0, \quad \exists x_\eta, x'_\eta \in \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad |x_\eta - x'_\eta| < \eta \ \text{ et } \ |f(x_\eta) - f(x'_\eta)| \geq \varepsilon_0.$$

3) Dans la négation de $\mathcal{U}$ pour la fonction $x \mapsto x^2$ et $\varepsilon_0 = 1$, on cherche x'_η de la forme $x_\eta + \eta/2$, avec $x_\eta > 0$. On a, pour $x > 0$,

$$|f(x + \eta/2) - f(x)| = |(x + \eta/2)^2 - x^2| = |\eta x + \eta^2/4| > \eta x.$$

On prend

$$x_\eta = \frac{1}{\eta} \quad \text{et} \quad x'_\eta = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2}.$$

En utilisant l'inégalité précédente, on obtient

$$|f(x'_\eta) - f(x_\eta)| > \eta x_\eta = 1 = \varepsilon_0.$$

On vient de montrer que

$$\exists \varepsilon_0 = 1 \quad \text{tel que} \quad \forall \eta > 0, \exists x_\eta = \frac{1}{\eta}, x'_\eta = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2} \quad \text{tels que} \quad |x_\eta - x'_\eta| = \frac{\eta}{2} < \eta \ \text{ et } \ |f(x'_\eta) - f(x_\eta)| > 1.$$

Barème indicatif : 3 — 6 — 3 — 3 — 5