# Analyse approfondie – 2025-2026

Contrôle continu n$^{\text{o}}$ 1
22 octobre, 2025 — 14:00-15:30

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone, ...) n'est autorisé.

---

**Exercice 1.** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

1) Écrire les définitions de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et de $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
2) Compléter le raisonnement suivant afin de montrer sous les hypothèses de la question 1) que

$$\lim_{x\to+\infty} (fg)(x) = -\infty.$$

*Soit $B < 0$. Que veut-on démontrer ? [...]*
*Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on peut trouver $\delta_f(B) > 0$ tel que*

$$[\dots]$$

*Comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, on peut trouver $\delta_g(B) > 0$ tel que*

$$[\dots]$$

*On prend $\delta(B) = [\dots]$ Alors, pour tout $x > [\dots]$*

***Solution.***

1) La limite de $f$ en $+\infty$ est $+\infty$ si pour tout $M > 0$, il existe $\delta_f(M) > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > \delta_f(M)$ implique $f(x) > M$.

La limite de $g$ en $+\infty$ est $-\infty$ si pour tout $M > 0$, il existe $\delta_g(M) > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > \delta_g(M)$ implique $g(x) < -M$.

2) Soit $B < 0$. On cherche $\delta(B) > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > \delta(B)$ implique $(fg)(x) < B$.
Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on peut trouver $\delta_f(B) > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x > \delta_f(B) \Longrightarrow f(x) > -B.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, on peut trouver $\delta_g(B) > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x > \delta_g(B) \Longrightarrow g(x) < B.$$

On prend $\delta(B) = \max(\delta_f(B), \delta_g(B))$, en supposant $-B \geq 1$. Alors, pour tout $x > \delta(B)$ on a

$$(fg)(x) = f(x)g(x) < f(x)\,B < (-B)B \leq B.$$

**Exercice 2.** Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier soigneusement vos réponses (avec des arguments ou des contre exemples).

1) La fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.
2) Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\gamma(x) = x$ si $x$ est rationnel et 0 sinon.
   a) La fonction $\gamma$ admet la limite 0 en 0.

b) La fonction $\gamma$ admet la limite 1 en 1.

***Solution.***

1) L'affirmation est vraie. Il suffit de trouver deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ non nulles, qui convergent vers 0 et telles que

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(b_n).$$

On prend

$$a_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(\pi + 2n\pi) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

2) Vraie pour a) et faux pour b). Pour voir que $\lim_{x\to 0} \gamma(x) = 0$ on applique le théorème d'encadrement. On a pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$-x \leq \gamma(x) \leq x.$$

En passant à la limite on obtient le résultat.

Pour voir que la limite en 1 n'existe pas, comme dans l'argument du premier point, on trouve deux suites qui tendent vers 1, et pour lesquelles les limites de leurs images par $\gamma$ sont distinctes. On prend, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad b_n = 1 - \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \gamma(b_n).$$

**Exercice 3.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I$ à valeurs réelles. On suppose que $f$ vérifie

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

Montrer en utilisant la définition de la continuité avec $\varepsilon$ et $\delta$ que $f$ est continue en tout point de $I$.

***Solution.***

Soit $a \in I$ et soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall x \in I,\ |x - a| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

On prend $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Alors si $x \in I$ vérifie $|x - a| < \varepsilon$, en utilisant l'hypothèse, on a

$$|f(x) - f(a)| \leq |x - a| < \varepsilon.$$

**Barème indicatif : 7 — 7 — 6**