Solution d'un exercice supplémentaire

Énoncé

Pour la série de terme général $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2\,x+n}$, $n \geq 1$, analyser les convergences simple, normale et uniforme sur $]0,+\infty[$.

Solution

La convergence simple. Soit $x > 0$. Alors

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2\,x+n} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2\,x} = \frac{1}{x}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6x},$$

donc la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2\,x+n}$ converge simplement (et absolument car chaque terme est positif).

La convergence normale. Avec le même raisonnement on montre que la série converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

On remarque qu'on n'a pas la convergence normale sur $]0,+\infty[$, car $\|f_n\|_{\infty,]0,+\infty[} = \dfrac{1}{n}$.

La convergence uniforme. On affirme que la série ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

La solution initiale que j'avais proposée est un brin compliquée. Après avoir regardé attentivement l'énoncé du théorème ci-dessous (concernant la commutativité des limites sur n et sur x), la réponse négative est une conséquence directe de ce théorème. Cette remarque avait été faite par Aurélien en TD, mais j'avais oublié le fait que l'égalité dont parle le théorème est réalisée dans $\mathbb{R}$.

Première méthode

On rappelle le théorème du cours.

Théorème. *Si la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a,b[$ vers g et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la limite $\lim_{x\to b^-} g_n(x)$ existe et est réelle, alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to b^-} g_n(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) \in \mathbb{R}.$$

On l'applique en prenant pour g_n la somme partielle

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2x+k}.$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0^+}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2x+k} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty \notin \mathbb{R},$$

on en déduit que la convergence n'est pas uniforme sur $]0,+\infty[$.

Deuxième méthode

Pour montrer la convergence uniforme, il faudrait montrer que

$$\left\| \sum_{n \geq N} f_n \right\|_{\infty,]0, +\infty[} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 \qquad (\star)$$

car, par définition,

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N-1} f_n = \sum_{n \geq 1} f_n.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\left| \sum_{n \geq N} f_n(x) \right| = \sum_{n \geq N} \frac{1}{n(nx+1)}.$$

Sur $[1, +\infty[$ la série converge normalement, donc uniformément. Maintenant, pour x fixé, $x < 1$, on pose

$$E = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

On suppose que $N < E$. Comme

$$E \leq \frac{1}{x} < E + 1$$

on a

$$xE \leq 1 < (E+1)x,$$

c'est-à-dire

$$1 - x < xE \leq 1.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq N} \frac{1}{n(nx+1)} &= \sum_{n=N}^{E} \frac{1}{n(nx+1)} + \sum_{n=E+1}^{2E} \frac{1}{n(nx+1)} + \sum_{n=2E+1}^{3E} \frac{1}{n(nx+1)} + \cdots \\
&\geq \sum_{n=N}^{E} \frac{1}{E(Ex+1)} + \sum_{n=E+1}^{2E} \frac{1}{2E(2Ex+1)} + \sum_{n=2E+1}^{3E} \frac{1}{3E(3Ex+1)} + \cdots \\
&\geq \sum_{n=N}^{E} \frac{1}{E(1+1)} + \sum_{n=E+1}^{2E} \frac{1}{2E(2+1)} + \sum_{n=2E+1}^{3E} \frac{1}{3E(3+1)} + \cdots \\
&= \frac{E-N+1}{E(1+1)} + \frac{E}{2E(2+1)} + \frac{E}{3E(3+1)} + \cdots \\
&= \left(\frac{E-N+1}{2E} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} \right) + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots \\
&= \frac{E-N+1-E}{2E} + 1 \\
&= 1 - \frac{N-1}{2E} \\
&\geq 1 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $(\star)$ n'est pas vérifiée.