Solution de l'exercice 9, feuille no 1

Énoncé

Construire une suite de fonctions continues, linéaires par morceaux sur $[0,2]$, qui converge simplement et qui ne converge pas uniformément.

Remarque. Une fonction linéaire par morceaux (ou *affine par morceaux*) est une fonction définie sur une réunion d'intervalles réels et dont la restriction à chacun de ces intervalles est donnée par une expression affine. Son graphe est donc constitué de segments de droite (éventuellement privés de leurs extrémités). Une telle fonction n'est pas nécessairement continue.

Solution

L'idée est de construire une suite de fonctions continues linéaires par morceaux de norme 1 qui tend simplement vers la fonction nulle.

Graphiquement une solution est esquissée dans la figure 1.

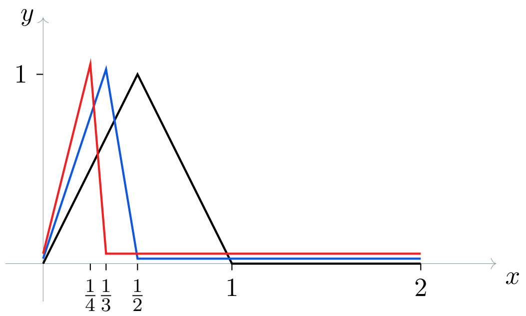

Figure 1: Les fonctions f_1, f_2 et f_3 en noir, bleu et rouge respectivement. Les graphes de f_2 et f_3 sont légèrement déplacés vers le haut pour avoir un meilleur aperçu

Construction de $(f_n)_{n\geq 1}$ et convergence simple. La fonction f_n, pour $n \geq 1$, vérifie

$$f_n(0) = 0, \qquad f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1, \qquad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \qquad f_n(2) = 0.$$

Sur chacun des intervalles $[0, \frac{1}{n+1}]$, $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ et $[\frac{1}{n}, 2]$ la fonction est affine joignant les points correspondant. On obtient les expressions explicites suivantes :

- $f_n(x) = (n+1)x$ si $x \in [0, \frac{1}{n+1}]$
- $f_n(x) = n(n+1)(\frac{1}{n} - x)$ si $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$
- $f_n(x) = 0$ si $x \in [\frac{1}{n}, 2]$.

On affirme que la suite converge simplement vers la fonction nulle. Pour justifier cette affirmation, soit $x \in]0,2]$. On cherche un entier n_x tel que $\frac{1}{n+1} < x$, c'est-à-dire $n > \frac{1}{x} - 1$. Donc si on considère $n_x = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$, alors pour tout f$x \geq n_x$, on a $f_n(x) = 0$. Donc

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$