Solution de l'exercice 1 5), feuille no 2

Énoncé

Pour la série de terme général $f_n(x) = \dfrac{1}{n(|x-n|+1)}$, $n \geq 1$, analyser les convergences simple, normale et uniforme sur $\mathbb{R}$.

Solution

La convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $K = \lfloor x \rfloor + 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(|x-n|+1)} &= \sum_{n=1}^{2K-1} \frac{1}{n(|x-n|+1)} + \sum_{n\geq 2K} \frac{1}{n(|x-n|+1)} \\
&\leq A + \sum_{n\geq 2K} \frac{1}{n(n/2+1)} \qquad \left(\text{car } |n-x| \geq |n-K| > \frac{n}{2}\right) \\
&\leq A + 2\sum_{n\geq 2K} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

donc la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(|x-n|+1)}$ converge simplement (et absolument car chaque terme est positif).

La convergence normale. On a besoin de contrôler la norme sup de chaque terme. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x-n| \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $x = n$, on a

$$0 < \frac{1}{n(|x-n|+1)} \leq f_n(n) = \frac{1}{n}.$$

Donc $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \dfrac{1}{n}$. Il s'ensuit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

La convergence uniforme. Cette question n'apparait pas sur la feuille d'exercice, mais il est naturel de se poser cette question étant donné qu'il n'y a ps de convergence normale.

Pour montrer que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ il faut montrer que

$$\left\| \sum_{n\geq N} f_n \right\|_{\infty,\mathbb{R}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \qquad (\star)$$

car, par définition

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N-1} f_n = \sum_{n\geq 1} f_n.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\left|\sum_{n\geq N} f_n(x)\right| = \sum_{n\geq N} \frac{1}{n(|x-n|+1)}.$$

On cherche à majorer chaque terme par une expression indépendante de x pour obtenir une majoration de la norme sup dans ($\star$).

Je développe un argument dans le cas $x > N$ qui est plus difficile. Il faut pouvoir compléter le cas $x \leq N$. On pose $M = \lfloor x \rfloor$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq N} \frac{1}{n(|x-n|+1)} &= \sum_{n=N}^{M} \frac{1}{n(|x-n|+1)} + \sum_{n\geq M+1} \frac{1}{n(|x-n|+1)} \\
&\leq \sum_{n=N}^{M} \frac{1}{n((M-n)+1)} + \sum_{n\geq M+1} \frac{1}{n((n-M-1)+1)} \\
&= \sum_{n=N}^{M} \frac{1}{n(M-n+1)} + \sum_{n\geq M+1} \frac{1}{n(n-M)}
\end{aligned}$$

On regarde chacune des deux sommes séparément. Pour la première, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N}^{M} \frac{1}{n(M-n+1)} &= \frac{1}{M+1} \sum_{n=N}^{M} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{M-n+1}\right) \\
&= \frac{1}{M+1}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{M} + \frac{1}{M-N+1} + \frac{1}{M-N} + \cdots + \frac{1}{1}\right) \\
&\leq \frac{2}{M+1} \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} \\
&\leq \frac{2}{M+1}\left(1 + \int_1^M \frac{dt}{t}\right) = \frac{2(1+\log M)}{M+1} \\
&\leq \frac{2(1+\log N)}{N+1} < \frac{2(1+\log N)}{N}.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième somme, on utilise le même type d'argument (et le fait que la série converge absolument),

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq M+1} \frac{1}{n(n-M)} &= \frac{1}{M+1} + \frac{1}{(M+2)2} + \frac{1}{(M+3)3} + \cdots \\
&= \frac{1}{M}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{M+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{M+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{M+3} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{M}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{M}\right) \\
&\leq \frac{1}{M}\left(1 + \int_1^M \frac{dt}{t}\right) = \frac{1+\log M}{M} \\
&< \frac{1+\log N}{N}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\left|\sum_{n\geq N} f_n(x)\right| \leq \frac{3(1+\log N)}{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$