Solution de l'exercice 13, feuille no 1

Énoncé

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{1+e^{nx}}$.

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qu'on déterminera.

2) Montrer que pour tout $a > 0$, les intégrales

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\,dx \quad \text{et} \quad I(a) = \int_0^a f(x)\,dx$$

sont bien définies, puis comparer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(a)$ et $I(a)$.

3) Montrer que les intégrales généralisées

$$J_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

convergent, puis comparer $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$ et J.

Remarque. Comme

$$J_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a f_n(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} I_n(a),$$

la comparaison de $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$ et de J signifie qu'on veut voir si

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{a\to+\infty} I_n(a) = \lim_{a\to+\infty}\lim_{n\to\infty} I_n(a) = J. \tag{1}$$

On reviendra sur ce point dans la dernière section.

Solution

1) Pour $x > 0$ on a

$$\frac{x}{1+e^{nx}} = \frac{1}{e^{-nx}+1}\,\frac{x}{e^{nx}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

car le deuxième facteur tend vers zéro et le premier vers 1.

Pour $x = 0$, la suite $(f_n(0))_n$ est la suite nulle. Si $x < 0$, alors $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. On conclut que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Pour finir, on étudie la norme sup de la fonction $f_n - f$ sur $\mathbb{R}$. On a

$$d_n(x) = f_n(x) - f(x) = \begin{cases} -\dfrac{xe^{nx}}{1+e^{nx}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{1+e^{nx}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-x}{1+e^{-nx}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{1+e^{nx}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \frac{|x|}{1+e^{n|x|}},$$

11 janvier 2024

par conséquent il suffit d'étudier la variation[1], ou de borner cette fonction sur $[0, +\infty[$ (car elle est paire). Comme pour tout $t \geq 0$, on a $e^t \geq 1 + t$, on en déduit que sur $[0, +\infty[$,

$$d_n(x) = \frac{x}{1 + e^{nx}} \leq \frac{x}{2 + nx} < \frac{1}{n}.$$

Pour la dernière inégalité on a utilisé le fait que $2 + nx > nx$ sur $[0, +\infty[$. Donc $\|f_n - f\|_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0$, c'est-à-dire la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f.

2) Les fonctions f_n et f sont continues, donc les intégrales sont bien définies sur $[0, a]$. De plus, comme la convergence est uniforme,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(a) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^a f_n(x)\,dx = \int_0^a \Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big) dx = \int_0^a f(x)\,dx = 0 = I(a).$$

3) On présente une première méthode basée sur un calcul direct. On veut évaluer (borner) J_n et montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0 = \int_0^{+\infty} 0\,dx.$$

On a

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + e^{nx}}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{1 + e^{nx}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + e^{nx}}\,dx.$$

La séparation de l'intégrale en deux intégrales, sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ est suggérée par la forme de f_n. Il est instructif de regarder les graphes de f_2 et de f_3, voir la figure 1.

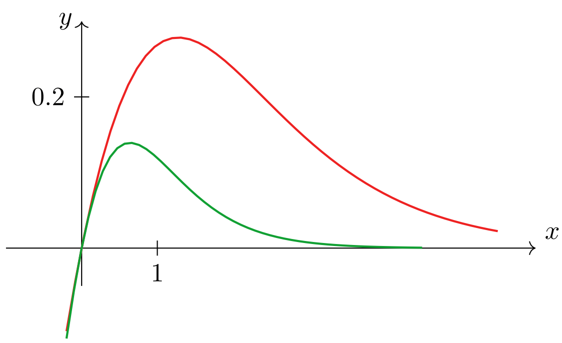

Figure 1: Les graphes des fonctions f_1 et f_2 en rouge et vert respectivemnt.

Pour la première intégrale (on veut la majorer), on utilise l'inégalité $e^{nx} \geq 1 + nx > nx$. On obtient

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + e^{nx}}\,dx < \int_0^1 \frac{x}{1 + nx}\,dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{x}{\frac{1}{n} + x}\,dx < \frac{1}{n} \int_0^1 1\,dx = \frac{1}{n}.$$

Pour la deuxième, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + e^{nx}}\,dx < \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{nx}}\,dx = \int_1^{+\infty} xe^{-nx}\,dx &= -\frac{1}{n} \int_1^{+\infty} x(e^{-nx})'\,dx \\
&= -\frac{1}{n} \left([xe^{-nx}]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} e^{-nx}\,dx \right) \\
&= \frac{e^{-n}}{n} - \frac{1}{n^2} [e^{-nx}]_1^{+\infty} = \frac{e^{-n}}{n} + \frac{e^{-n}}{n^2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$J_n < \frac{1}{n} + \frac{1}{ne^n} + \frac{1}{n^2 e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

[1]Après avoir calculé sa dérivée dont les zéros sont difficiles à comprendre, on s'aperçoit qu'il faut passer par un majorant.

Remarque. On aurait pu raisonner différemment pour majorer l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+e^{nx}}\, dx$, par exemple en utilisant la minoration du dénominateur

$$1 + e^{nx} > \frac{n^3 x^3}{6}.$$

Celle-ci est inspirée par le développement de Taylor en 0.

Commentaires

L'égalité (1) peut être justifiée dans un cadre théorique plus large. On regarde $(I_n)_n$ comme une suite de fonctions sur $[0, +\infty[$ qui tend simplement vers la fonction I. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a

$$I_n'(x) = f_n(x)$$

car $I_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$. D'après le théorème du cours sur les primitives (ou dérivées), il s'ensuit que la suite $(I_n)_n$ converge uniformément vers I :

$$\begin{tikzcd} I_n \arrow[r, red, "cu"] & I & \textcolor{red}{\text{(conclusion)}} \\ f_n \arrow[u, "\int_0^x"] \arrow[r, "cu"] & f \arrow[u, "\int_0^x"'] & \text{(hypothèse)} \end{tikzcd}$$

Pour conclure, on applique le théorème ci-dessus concernant les limites et on en déduit l'égalité

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} I_n(x) = \lim_{x\to+\infty} I(x).$$

Théorème. *Si la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a, b[$ vers g et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la limite $\lim_{x\to b^-} g_n(x)$ existe et est réelle, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to b^-} g_n(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. L'argument est typique pour les résultats impliquant la convergence uniforme. On borne une quantité en la séparant en trois morceaux qu'on borne séparément par la suite, **dans le bon ordre**.

On note $\beta_n = \lim_{x\to b^-} g_n(x)$. On montre d'abord que la suite $(\beta_n)_n$ converge vers $\beta \in \mathbb{R}$ en montrant qu'elle est une suite de Cauchy, et puis que

$$\beta = \lim_{x\to b^-} g(x).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour voir que la suite $(\beta_n)_n$ est de Cauchy, on interprète les hypothèses :

- $g_n \xrightarrow{cu} f$, donc il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N(\varepsilon)$ et pour tout $x \in [a, b[$, on a
$$|g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon \tag{2}$$

- comme $g_n(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} \beta_n$, il existe $\delta_n(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $-\delta_n(\varepsilon) + b < x < b$ on a

$$|g_n(x) - \beta_n| \leq \varepsilon. \tag{3}$$

Si $m, n \geq N(\varepsilon)$, **en choisissant** un x tel que

$$-\min\{\delta_m(\varepsilon), \delta_n(\varepsilon)\} + b < x < b,$$

et en invoquant (2) et (3), on a

$$|\beta_m - \beta_n| \leq |\beta_m - g_m(x)| + |g_m(x) - g(x)| + |g(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - \beta_n| \leq 4\varepsilon. \tag{4}$$

Donc $(\beta_n)_n$ est une suite de Cauchy. En particulier, elle converger vers un $\beta \in \mathbb{R}$ et pour $n \geq N(\varepsilon)$,

$$|\beta_n - \beta| = \lim_{m\to+\infty} |\beta_n - \beta_m| \leq 4\varepsilon.$$

Pour finir, il faut montrer que g converge en b vers β. On a

$$\begin{aligned} |g(x) - \beta| &= |g(x) - g_n(x) + g_n(x) - \beta_n + \beta_n - \beta| \\ &\leq |g(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - \beta_n| + |\beta_n - \beta| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + 4\varepsilon \\ &= 6\varepsilon \end{aligned}$$

dès que[2] $n \geq N(\varepsilon)$ et $-\delta_n(\varepsilon) + b < x < b$. □

[2] On pourrait utiliser $\delta_{N(\varepsilon)}$.