Analyse 2 — 2021-2022

Exemples de séries entières

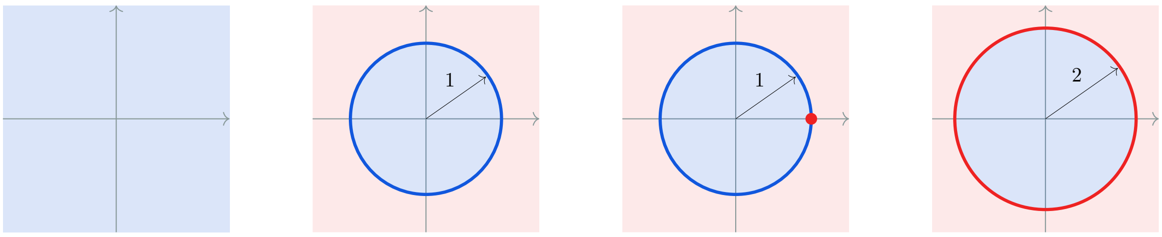
Les exemples suivants montrent des comportements différents de séries entières sur la frontière de leurs disques de convergence. Les exemples complètent la remarque sur le rayon de convergence :

Soit R le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Alors

(i) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ CVN sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)}$ avec $r < R$

(f) on ne sait rien dire en général sur le comportement de la série quand $|z| = R$

(e) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge pour tout z tel que $|z| > R$ — la suite $(|a_n z^n|)_n$ est non bornée.



$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n}$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^n}$

Pour montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n}$ converge pour tout z tel que $|z| = 1$, $z \neq 1$, on applique le critère de Dirichlet pour les séries numériques :

Critère de Dirichlet. *Si les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ vérifient*

- $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$, *avec* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- *il existe* $M > 0$ *tel que* $\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| \leq M$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

On considère $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = z^n$. Alors, pour $z \neq 1$,

$$\left|1 + z + z^2 + \cdots + z^n\right| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{2}{|1 - z|},$$

d'où la convergence.