Compléments de cours

Il y a deux affirmations que je voudrais justifier ici ; elles sont au cœur de la compréhension du rôle joué par les séries entières convergentes. Le corollaire 2.4 en est un exemple important.

1. Introduction

On commence par une partie introductive qui tourne autour de la série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$ et qui a un caractère combinatoire. On établit ensuite la formule (1.2) qui sera utilisée plus tard.

On considère la série entière

$$u(z) = 1 + z + z^2 + \cdots .$$

Son rayon de convergence est égal à 1. Sa somme $\frac{1}{1-z}$ coïncide avec la fonction $U : z \mapsto \frac{1}{1-z}$ dont le domaine de définition est $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. La série u représente le développement en série (de Taylor) de U en 0. On a

$$u(z) = U(z)|_{D(0,1)}.$$

- En dérivant successivement

$$1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z},$$

  on obtient, pour tout $z \in D(0,1)$, les identités

$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots = 1! \sum_{n\geq 0} \binom{n+1}{1} z^n = \frac{1!}{(1-z)^2}$$

$$2\cdot 1 + 3\cdot 2z + 4\cdot 3z^2 + \cdots = 2! \sum_{n\geq 0} \binom{n+2}{2} z^n = \frac{2!}{(1-z)^3}$$

  et donc, par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$p! \sum_{n\geq 0} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}$$

  c'est-à-dire

$$\frac{1}{p!} u^{(p)}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = u^{p+1}(z). \tag{1.1}$$

- On aura besoin de connaitre les puissances de $u(z) - 1$. Mais $u(z) - 1 = zu(z)$. Alors, en utilisant (1.1),

$$(u(z) - 1)^p = z^p\, u^p(z) = z^p \sum_{n\geq 0} \binom{n+p-1}{p-1} z^n = \sum_{m\geq p} \binom{m-1}{p-1} z^m. \tag{1.2}$$

  Dans la dernière égalité on a fait le changement d'indice de sommation $m = n + p$.

2. Les deux propositions

Proposition 2.1. *Soient $s(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ et $\sigma(w) = \beta_0 + \beta_1 w + \beta_2 w^2 + \cdots$ deux séries entières de rayons de convergence $r > 0$ et, respectivement $\rho > 0$. Alors $(\sigma \circ s)(z)$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Explicitement,*

$$R \geq \max\{r' < r \mid s(D(0, r')) \subset D(0, \rho)\}.$$

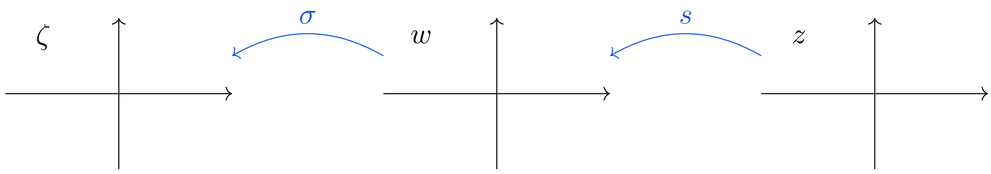

Figure 1: La composition $\zeta = (\sigma \circ s)(z) = \sigma(s(z))$

Démonstration. Nous avons vu (par récurrence par exemple en utilisant le résultat du cours) que les produits $s^2(z)$, $s^3(z)$, $\ldots$, $s^n(z)$, $\ldots$ sont des séries entières convergentes de rayon de convergence $\geq r$. Comme le terme libre de s est nul, on a

$$\begin{aligned}
s(z) &= a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \\
s^2(z) &= a_1^2 z^2 + (a_1 a_2 + a_2 a_1) z^3 + (a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1) z^4 + \cdots \\
&= a_1^2 z^2 + 2 a_1 a_2 z^3 + (2 a_1 a_3 + a_2 a_2) z^4 + \cdots \\
s^3(z) &= a_1^3 z^3 + (2 a_1 a_1 a_2 + a_2 a_1^2) z^4 + [a_1(2 a_1 a_3 + a_2 a_2) + 2 a_2 a_1 a_2 + a_3 a_1^2] z^5 + \cdots \\
&= a_1^3 z^3 + 3 a_1^2 a_2 z^4 + (3 a_1^2 a_3 + 2 a_1 a_2^2 + a_2^2) z^5 + \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Par la suite on utilisera la notation

$$s^p(z) = \sum_{n \geq p} a_{p,n} z^n.$$

On pourrait faire l'effort pour décrire explicitement tous les coefficients $a_{p,n}$ de toutes les puissances de s. Je ne vais pas le faire, car on n'en aura pas besoin. Par contre on aura besoin d'une description qualitative de ces coefficients :

Affirmation. *pour $n \geq p$, le coefficient $a_{p,n}$ de z^n dans la série entière $s^p(z)$ est une somme de $\binom{n-1}{p-1}$ monômes de degré p en les $n-1$ premiers coefficients de $s(z)$. De plus, la somme des indices dans chaque monôme vaut n.*

Le nombre de monômes apparaissant dans l'expression de du coefficient $a_{p,n}$ est le coefficient correspondant de la série $(z + z^2 + \cdots)^p$. On finit en appliquant l'identité (1.2).

Après avoir compris la structure des coefficients des puissances $s^2(z)$, $s^3(z)$, $\ldots$, on peut regarder la composition. On a

$$(\sigma \circ s)(z) = \sum_{n \geq 0} \beta_n s^n(z) = \beta_0 + \sum_{n \geq 1} \beta_n \Big(\sum_{k \geq n} a_{n,k} z^k \Big) = \beta_0 + \sum_{k \geq 1} \Big(\sum_{p=1}^{k} \beta_p a_{p,k} \Big) z^k.$$

Pour justifier la convergence et calculer le rayon de convergence de cette série, on regarde la suite de terme général
$$\Big|\sum_{p=1}^{k}\beta_p a_{p,k}\Big|\widetilde{r}^k, \tag{$\sharp$}$$
pour un réel positif $\widetilde{r} < r$. On sait que

- pour $\rho' < \rho$, il existe $\mu(\rho') > 0$ tel que $|\beta_n| \leq \dfrac{\mu(\rho')}{\rho'^n}$
- pour $r' < r$, il existe $M(r') > 0$ tel que $|a_n| \leq \dfrac{M(r')}{r'^n}$
- $a_{p,k}$ est une somme de $\binom{k-1}{p-1}$ monômes de degré p en les $k-1$ premiers coefficients de $s(z)$.

Alors
$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{p=1}^{k}\beta_p a_{p,k}\Big|\,\widetilde{r}^k \leq \sum_{p=1}^{k}|\beta_p||a_{p,k}|\,\widetilde{r}^k &\leq \sum_{p=1}^{k}\frac{\mu(\rho')}{\rho'^p}\binom{k-1}{p-1}\frac{M(r')^p}{r'^k}\,\widetilde{r}^k\\
&= \mu(\rho')\sum_{p=1}^{k}\binom{k-1}{p-1}\left(\frac{M(r')}{\rho'}\right)^p\left(\frac{\widetilde{r}}{r'}\right)^k\\
&= \frac{M(r')\mu(\rho')}{\rho'}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\left(\frac{M(r')}{\rho'}\right)^j\left(\frac{\widetilde{r}}{r'}\right)^k\\
&= \frac{M(r')\mu(\rho')}{\rho'}\left(1+\frac{M(r')}{\rho'}\right)^{k-1}\left(\frac{\widetilde{r}}{r'}\right)^k.
\end{aligned}$$
Donc, si on prend $\widetilde{r}$ tel que
$$\widetilde{r} \leq \frac{\rho'}{\rho' + M(r')}\,r',$$
la suite de terme général ($\sharp$) est bornée. Il s'ensuit que la série composée a un rayon de convergence > 0.

Soit R le rayon de convergence de la série composée et soit $r' < R \leq r$. Alors $s(r') \in \mathbb{C}$ est bien défini. La série σ converge en $s(r')$ par le choix de r', donc $|s(r'))| \leq \rho$. La valeur de R en découle. $\square$

Proposition 2.2. *Soit $s(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si $\zeta \in D(0, R)$, alors la série entière*
$$\sum_{n\geq 0}\frac{s^{(n)}(\zeta)}{n!}\,w^n$$
a le rayon de convergence $\geq R - |\zeta| > 0$ et pour tout $z \in D(\zeta, R - |\zeta|)$,
$$s(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{s^{(n)}(\zeta)}{n!}\,(z-\zeta)^n.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
s(z) &= \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} a_n \big((z-\zeta)+\zeta\big)^n \\
&= \sum_{n\geq 0} a_n (w+\zeta)^n = \sum_{n\geq 0} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^k \zeta^{n-k} \\
&= \sum_{k\geq 0} \Big(\sum_{n\geq k} a_n \binom{n}{k} \zeta^{n-k} \Big) w^k \qquad\qquad \text{(en posant } p = n-k\text{)} \\
&= \sum_{k\geq 0} \Big(\sum_{p\geq 0} a_{p+k} \binom{p+k}{k} \zeta^{p} \Big) w^k
\end{aligned}$$

Il faut d'abord justifier que les coefficients, définis par des séries numériques (complexes), existent. L'existence est obtenue en remarquant que

$$b_k := \sum_{p\geq 0} a_{p+k} \binom{p+k}{k} \zeta^p = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \Big(\sum_{n\geq 0} a_n z^n \Big) \Big|_{z=\zeta} = \frac{1}{k!}\, s^{(k)}(\zeta).$$

Pour finir, il faut justifier que la série entière

$$\sum_{n\geq 0} b_n w^n$$

a le rayon de convergence strictement positif. On contrôle la croissance des dérivées d'une série entière sur des disques fermés contenus dans son domaine de convergence dans le lemme 2.3 ci-dessous. En l'appliquant, on a

$$\sum_{n\geq 0} |b_n|\,|w|^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\, |s^{(n)}(\zeta)|\,|w|^n \leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\, r M_r \frac{n!}{(r-|\zeta|)^{n+1}}\, |w|^n = \frac{r M_r}{r-|\zeta|} \sum_{n\geq 0} \Big(\frac{|w|}{r-|\zeta|} \Big)^n.$$

La dernière série est convergente dès que $|z-\zeta| = |w| < r - |\zeta|$. □

Lemme 2.3. *Si $g(z) = \sum c_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R, alors pour chaque $r < R$, il existe une constante $M_r > 0$ telle que pour tout $z \in D(0,r)$,*

$$|g^{(n)}(z)| \leq r M_r \frac{n!}{(r-|z|)^{n+1}}.$$

Démonstration. Comme la série est convergente sur $D(0,R)$, la suite $(|c_n| r^n)_n$ est bornée (tend vers 0), c'est-à-dire il existe M_r telle que, pour tout k,

$$|c_n| \leq \frac{M_r}{r^n}.$$

Alors, pour $z \in D(0,R)$,

$$|g^{(k)}(z)| \leq \sum_n |c_n| \left| \frac{d^k}{dz^k} z^n \right|.$$

Mais, en posant $\rho = |z|$, on a

$$\left| \frac{d^k}{dz^k} z^n \right| = \frac{d^k}{d\rho^k} \rho^n.$$

Si $\rho < r$, on en déduit

$$|g^{(k)}(z)| \leq \sum_n |c_n| \frac{d^k}{d\rho^k} \rho^n \leq M_r \frac{d^k}{d\rho^k} \sum_{k\geq 0} \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n = M_r \frac{d^k}{d\rho^k} \frac{r}{r-\rho} = r M_r \frac{k!}{(r-\rho)^{k+1}}.$$

□

Corollaire 2.4. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Si f admet un développement en série entière en $a \in I$ de rayon de convergence r, alors*

1) *f est indéfiniment dérivable sur $]-r+a, a+r[$ et*

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}}{n!} (x-a)^n$$

pour tout $x \in]-r+a, a+r[$ (on dit que f est développable en série de Taylor en a)

2) *f est développement en série de Taylor en tout $b \in]-r+a, a+r[$, le rayon de convergence étant $\geq r - |b-a|$.*

Remarque. Plus généralement, on peut considérer $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction complexe, avec Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Démonstration. La preuve découle de la proposition 2.2 — l'énoncé du corollaire est une reformulation de cette proposition qui met en lumière le caractère local de l'analyticité et la signification des coefficients des séries entières qui apparaissent. □

3. Exercices et applications

Des techniques similaires à celles développées ci-dessus permettent d'établir les résultats suivants concernant les séries entières convergentes :

1. Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série de rayon de convergence $r > 0$ telle que $a_0 \neq 0$, alors il existe une série $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ de rayon de convergence > 0 telle que

   $$\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right) = 1.$$

   Les coefficients b_n sont les solutions de systèmes linéaires carrés $n \times n$.

2. Si $s(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ est une série de rayon de convergence $r > 0$ telle que $a_1 \neq 0$, alors il existe une série $t(w) = \sum_{n\geq 1} b_n w^n$ de rayon de convergence > 0 telle que

   $$s(t(w)) = w \qquad \text{et} \qquad t(s(z)) = z$$

   dans les rayons de convergence respectifs.