Suites et séries de fonctions, séries entières 2024–2025

CC NO 3 — DURÉE 2H30

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n+1} - x\right) & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{n-1}{n+1}\right[\\ 0 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{n-1}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right[\\ (n+1)\left(x - \frac{n}{n+1}\right) & \text{si} \quad x \in \left[\frac{n}{n+1}, 1\right]. \end{cases}$$

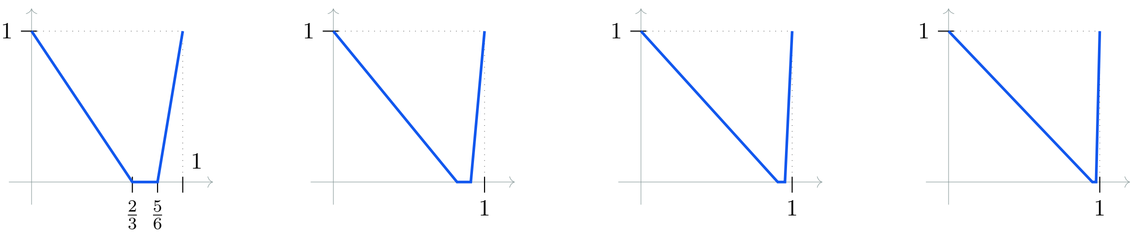
1) Tracer le graphe de f_n pour n fixé suffisamment grand.

2) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction que l'on déterminera.

3) Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 2}$ sur $[0,1]$.

Solution.

1)



le graphe pour $n = 5$ — le graphe pour $n = 10$ — le graphe pour $n = 20$ — le graphe pour $n = 40$

2) Soit $a \in [0,1[$. On a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n+1} - a\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{n+1}{n-1}\,a\right) = 1 - a.$$

De plus $f_n(1) = 1$ pour tout n. Donc la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

3) Comme f n'est pas continue en 1 et comme les fonctions f_n sont toutes continues sur $[0,1]$, il s'ensuit que la convergence $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ n'est pas uniforme.

Exercice 2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{1}{x + n^2 - 1}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. On note S la somme de la série.

1) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$, puis $\displaystyle\int_0^1 S(x)\,dx$.

Solution.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\sum_{n\geq 2} f_n(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{x+n^2-1} \leq \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1} < \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Comme la borne est indépendante de x, on obtient

$$\sum_{n\geq 2} \|f_n\|_\infty \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Donc la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers S. En particulier S est continue.

2) On considère la série des dérivées. Par un raisonnement similaire au précédent, on a, pour tout $xin\mathbb{R}_+$,

$$\sum_{n\geq 2} |f_n'(x)| = \sum_{n\geq 2} \left| -\frac{1}{(x+n^2-1)^2} \right| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} < \infty.$$

Donc on a la convergence uniforme de la série des dérivées sur $\mathbb{R}_+$. Comme la série $\sum_{n\geq 2} f_n$ converge en 0 (par exemple) et les f_n sont $\mathcal{C}^1$, on en déduit que sur chaque intervalle fermé du domaine de définition, la convergence de la somme est uniforme (on le savais déjà) et que la somme S est $\mathcal{C}^1$ (sur l'intervalle fermé). Donc S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ car tout point de $\mathbb{R}^+$ est contenu dans un intervallw fermé.

3) En utilisant la convergence uniforme de la série (pour la deuxième égalité), on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 S(x)\,dx &= \int_0^1 \sum_{n\geq 2} f_n(x)\,dx = \sum_{n\geq 2} \int_0^1 f_n(x)\,dx \\
&= \sum_{n\geq 2} \int_0^1 \frac{dx}{x+n^2-1} = \sum_{n\geq 2} \Big[\ln(x+n^2-1)\Big]_0^1 \\
&= \sum_{n\geq 2} \Big(\ln(n^2) - \ln(n^2-1)\Big) = \sum_{n\geq 2} \ln \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \\
&= \ln\left(\prod_{n\geq 2} \frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{3}{2}\frac{3}{4}\ldots\right) \\
&= \ln(2).
\end{aligned}$$

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence de

$$\text{(i)} \quad \sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{3n} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n\geq 1} \binom{2n}{n} x^n.$$

Solution.
Pour la première somme on fait le changement de coordonnées $t = x^3$; on obtient

$$\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{3n} = \sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x^3)^n = \sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} t^n.$$

En appliquant le critère de Cauchy pour cette dernière somme, comme

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$$

on obtient que son rayon de convegence est $1/e$. En revenanat sur le changement de variable, le rayon de convergence de la série (i) est $1/\sqrt[3]{e}$.

Pour la série (ii) on applique le critère de d'Alembert. On a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}\,\frac{n!\,n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4,$$

donc le rayon de convergence est $1/4$.

Exercice 4. Montrer que la fonction $f(x) = \ln(4-x^2)$ admet un développement en série entière au voisinage de 0 que l'on déterminera.

Solution.

Première méthode. On a

$$\begin{aligned}\Big(\ln(4-t^2)\Big)' &= \frac{-2t}{4-t^2} = \frac{-2t}{4}\,\frac{1}{1-\frac{t^2}{4}} = -\frac{t}{2}\,\frac{1}{1-(\frac{t}{2})^2}\\ &= -\frac{t}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n} = -\sum_{n\geq 0}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1}.\end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et x, on obtient

$$\begin{aligned}\ln(4-x^2)-\ln 4 &= \int_0^x \Big(\ln(t^2-4)\Big)'\,dt = \int_0^x -\sum_{n\geq 0}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1} dt = -\sum_{n\geq 0}\int_0^x \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1} dt\\ &= -\sum_{n\geq 0}\left[\frac{2}{2n+2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+2}\right]_0^x = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2} = -\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.\end{aligned}$$

Donc

$$\ln(4-x^2) = 2\ln 2 - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n2^{2n}}\,x^{2n}$$

pour tout $x \in\,]-2,2[$, car le rayon de convergence de la série est 2.

Deuxième méthode. On fait le même raisonnement, mais sur la fonction $\ln(1-ax)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$. On a le développement bien connu,

$$\begin{aligned}\ln(1-ax) &= \int_0^x (\ln(1-at))'\,dt = -a\int_0^x \frac{dt}{1-at}\\ &= -a\int_0^x \sum_{n\geq 0}(at)^n\,dt = -a\sum_{n\geq 0}a^n\int_0^x t^n\,dt\\ &= -a\sum_{n\geq 0}a^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n\geq 1}\frac{a^n}{n}\,x^n.\end{aligned}$$

Alors, en utilisant ce résultat,

$$\begin{aligned}\ln(4-x^2) &= \ln(2-x)+\ln(2+x) = 2\,\ln 2 + \ln\left(1-\frac{x}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\\ &= 2\,\ln 2 - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n2^n}\,x^n - \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n2^n}\,x^n\\ &= 2\ln 2 - \sum_{n\geq 1}\frac{2}{2n2^{2n}}\,x^{2n} = 2\ln 2 - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n2^{2n}}\,x^{2n}.\end{aligned}$$

Exercice 5. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n+1}\, x^n$. Donner son rayon de convergence et exprimer sa somme en terme de fonctions usuelles.

Solution.
Par le critère de d'aAlembert, le rayon de convergence est 1. Pour trouver une expression pour la somme, on remarque que

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n+1}\, x^n &= \sum_{n\geq 0} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n\geq 0} x^n - \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\, x^n \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\, x^{n+1}.\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} &= \sum_{n\geq 0} \int_0^x \left(\frac{1}{n+1}\, t^{n+1}\right)' dt = \sum_{n\geq 0} \int_0^x t^n\, dt \\ &= \int_0^x \sum_{n\geq 0} t^n\, dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x),\end{aligned}$$

on en déduit l'expression

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Exercice 6. Déterminer l'ensemble des fonctions développables en séries entières au voisinage de 0 de l'équation différentielle

$$t^2 y'(t) + y(t) = t. \tag{$\sharp$}$$

Solution.
On suppose qu'il existe une solution développable en série entière dans le voisinage de l'origine,

$$s(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n.$$

En remplaçant s dans ($\sharp$), on obtient

$$t^2 \sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n t^n = t,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n\geq 1} n a_n t^{n+1} + \sum_{n\geq 0} a_n t^n = t,$$

ou encore, en changeant l'indice de sommation dans la première somme ($n+1=k$),

$$\sum_{k\geq 2} (k-1) a_{k-1} t^k + \sum_{n\geq 0} a_n t^n = t.$$

En regroupant les termes, on arrive à

$$a_0 + (a_1 - 1)t + \sum_{k\geq 2} \left((k-1)a_{k-1} + a_k\right) t^k = 0$$

On obtient les identités

$$\begin{aligned}&a_0 = 0 \\ &a_1 = 1 \\ &a_k = -(k-1)a_{k-1} \quad \text{pour tout} \quad k \geq 2.\end{aligned}$$

Donc, par récurrence, $a_0 = 0$ et $a_n = (-1)^{n-1} n!$ pour tout $n \geq 1$. En revenant à la solution hypothétique, on a

$$s(t) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n! \, t^n.$$

Mais, en utilisant le critère de d'Alembert, le rayon de convergence est nul. On conclut que l'équation différentielle ordinaire ($\sharp$) n'admet pas de solution développable en série entière autout de l'origine.

Barème indicatif : 3 — 5 — 3 — 2,5 — 2,5 — 4