Algèbre linéaire 1 (deuxième partie) — 2023-2024

Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. Pour chacune des matrices suivantes calculer la matrice inverse lorsque celle-ci existe. Puis, résoudre le systme $C_a \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C_a = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit C une matrice 2×2 à coefficients réels. Donner une preuve ou un contre-exemple pour chacune des affirmations suivantes.

1) $\mathrm{tr}(C^2) \geq 0$ (où $\mathrm{tr}(C) = c_{1,1} + c_{2,2}$)
2) Chaque élément de C^2 est positif.
3) Si C est inversible, alors C^2 est inversible.

Exercice 3. On considère l'endomorphisme $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 30 & 11 & 70 \\ -6 & -2 & -13 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer A^2 et conclure que p est une projection vectorielle.
2) Pour $v_1 = (1, -3, 0)$ et $v_2 = (2, 1, -1)$, calculer $p(v_1)$ et $p(v_2)$. Calculer aussi $\ker(p)$. Si v_3 est un générateur de $\ker(p)$ dont les coordonnées dans la base canonique sont des entiers premiers entre eux, montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Donner la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ sans calcul (en justifiant la réponse).
4) Calculer les matrices de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$.
5) Vérifier par le calcul de changement de base la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.
6) En supposant que les vecteurs v_1 et v_2 n'étaient pas données, comment les choisiriez-vous ?

Exercice 4. On considère trois bases de $\mathbb{C}^2$: $\mathcal{B}_j = (e_j, f_j)$, $j = 1, 2, 3$, où

$$e_1 = (1, 0) \qquad e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f_1 = (0, 1) \qquad f_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad f_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right).$$

1) Justifier que les trois familles sont des bases et donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_3$ et celle de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}_1$.

2) Pour chaque $j = 1, 2, 3$, on considère l'endomorphisme $\psi_j : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tel que $\psi_j(e_j) = e_j$ et $\psi_j(f_j) = -f_j$.

   a) Les endomorphismes sont-ils bien définis ? Est-ce qu'ils sont tous différents ?

   b) Donner les matrices[1] M_j associées aux endomorphismes ψ_j dans la base $\mathcal{B}_1$.

   c) Calculer $M_2 M_3$. Donner une relation (éventuellement en utilisant le calcul précédent) satisfaite par les trois endomorphismes.

[1]Ces matrices sont célèbres et portent le nom du celui qui les a découvertes : les matrices de Pauli.

d) Est-ce que $M_2M_3 = M_3M_2$? Plus précisément, montrer que pour toute permutation circulaire $\sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, on a

$$M_{\sigma(1)}M_{\sigma(2)} - M_{\sigma(2)}M_{\sigma(1)} = 2iM_{\sigma(3)}.$$

Exercice 5. On considère l'application linéaire $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée en coordonnées (les coordonnées de la base canonique) par

$$\begin{cases} y_1 = -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ y_3 = -8x_1 + 4x_2 + 5x_3. \end{cases}$$

1) Donner A, la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ associée à s.

2) Calculer A^2 et conclure que s est une symétrie vectorielle.

3) Déterminer le noyau et l'image de s.

4) Choisir une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice associée à s est très simple.

5) Relier cette dernière matrice à la matrice A en utilisant des matrices de passage.

Exercice 6. On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les trois valeurs distinctes de a pour lesquelles l'équation $\varphi(v) = av$ a une infinité de solutions (l'inconnue est $v \in \mathbb{R}^3$).

2) Soient v_1, v_2 et v_3 trois solutions non nulles des trois équations du point précédent. Montrer qu'elles forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de φ dans cette base ?

Exercice 7. On considère l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P) = (X-2)P' - 3P$.

1) Donner une base pour le noyau de φ.

2) Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.

3) Déterminer la matrice D de φ dans la base $(1, X-2, (X-2)^2, (X-2)^3)$.

4) Écrire explicitement la formule qui relie A et D.

Exercice 8. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ (on peut penser $V = \mathbb{K}^n$) et soit $\varphi : V \to V$ un endomorphisme.

1) Montrer que $\ker(\varphi) \subset \ker(\varphi^2)$.

2) Plus généralement, montrer qu'on a la suite d'inclusions de sous-espaces affines

$$\ker(\varphi) \subset \ker(\varphi^2) \subset \ker(\varphi^3) \subset \cdots$$

et que cette suite stationne.

3) Plus précisément, montrer que si $d_j = \dim(\ker(\varphi^j))$, alors il existe un entier $k = k_\varphi$, $0 \leq k \leq n$, tel que

$$d_1 < d_2 < \cdots < d_{k-1} < d_k = d_{k+1} = d_{k+1} = \cdots.$$

4) On prend $n = 3$. Donner un exemple de $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pour lequel $k_\varphi = 3$. Puis un autre pour lequel $k_\varphi = 1$.

5) On prend $n = 3$ et on suppose que $k_\varphi = 2$ avec $d_1 = 1$ et $d_2 = 2$. Si $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base telle que $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $\ker(\varphi^2) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, quelle sera la forme de la matrice de φ dans la base $\mathcal{U}$?