Algèbre linéaire 1 (deuxième partie) — 2023-2024

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 3

Exercice 1. On considère le système linéaire

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + \ \ z + 3t = a \\ \ \ x + 3y - 2z - \ \ t = b \\ -x + \ \ y - 2z - 3t = c \end{cases}$$

où a, b et c sont des paramètres réels.

1) Déterminer $S_{a,b,c} \subset \mathbb{R}^4$, l'ensemble des solutions du système (qui dépend des trois paramètres). Écrire $S_{a,b,c}$ sous la forme (sol.particuliere) $+ S_{0,0,0}$.

2) Décrire le sous-espace $W \subset \mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice du système comme ensemble de solutions d'un système linéaire homogène.

3) Écrire le système sous la forme matricielle $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

4) On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Identifier les sous-ensembles $S_{a,b,c}$ et W en utilisant des objets associés à la fonction f.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par $f(x, y, z) = (y - z, z + x - 2y, -y + x, x - z)$.

1) Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques ? Justifier en même temps que f est une application linéaire.

2) Pour les sous-espaces $\ker(f) \subset \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{R}^4$ (dans l'ordre souhaité)

a) déterminer une base

b) donner des équations en nombre minimal (en utilisant les coordonnées associées aux bases canoniques respectives).

3) Quel est le rang de f ? L'application f est-elle surjective ? injective ?

Exercice 3. Reprendre l'exercice précédent pour $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + t, x + 3y + 4z, 2x + 5y + 7z + t)$. Puis, en complétant les bases du noyau et de l'image à des bases de $\mathbb{R}^4$ et respectivement $\mathbb{R}^3$, donner la matrice de f dans ces nouvelles bases.

Exercice 4. Les applications suivantes sont-elles linéaires? Justifier votre réponse. Lorsqu'elles le sont, déterminer leur noyau et image.

(i) $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$

(ii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$

(iii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (y, x + y - \sqrt{x^2})$

(iv) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x - y, xy)$

(v) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x - 2z, y + z)$

(vi) $\mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}_2[X],\ P \mapsto XP' + 3P$

(vii) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x - y, y + x, \sin(z))$

(viii) $\mathbb{K}_3[X] \to \mathbb{K}_3[X],\ P \mapsto P'P'' - P$

Exercice 5. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour chacun des trois cas ci-dessous, existe-t-il un endomorphisme $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ qui vérifie les conditions imposées ?

1) $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = e_2 - e_3$.

2) $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$, $g(e_3 - e_1) = e_2$.

3) $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_3) = e_2 - e_3$.

Dans chacun des cas, si l'application g existe, est-elle unique ? Si "oui", calculer $g(x_1, x_2, x_3)$. Si "non", donner plusieurs exemples. Quelle est la matrice associée dans la base canonique (pour chacun des exemples) ?

Exercice 6 $(^*)$**.** Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^n$). Établir l'équivalence suivante : f est une homothétie (c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$) si et seulement si pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, $f(v)$ est colinéaire à v.

Exercice 7. Soient $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathbb{R}^5$, $(e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $(e'_1, \ldots, e'_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Construire, si cela est possible, des applications linéaires $\varphi : E \to F$ telles que :

(i) $\operatorname{im}(\varphi) = \{0\}$ (ii) $\operatorname{im}(\varphi) = \operatorname{Vect}(e'_2)$ (iii) $\operatorname{im}(\varphi) = F$

(iv) $\ker(\varphi) = \operatorname{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$ (v) $\operatorname{im}(\varphi) = \operatorname{Vect}(e'_2, e'_3)$ (vi) $\ker(\varphi) = \operatorname{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$ et $\operatorname{im}(\varphi) = \operatorname{Vect}(e'_2, e'_3)$.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $D = \operatorname{Vect}(1, 2, 3))$ et soit H le plan d'équation $3x + y - 2z = 0$.

1) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.

2) Déterminer les expressions analytiques de p la projection sur H de direction D, et de s la symétrie par rapport à H de direction D. On rappelle que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$

$$p(u) = p(u_D + u_H) = u_H \quad \text{et} \quad s(u) = (u_D + u_H) = -u_D + u_H$$

Exercice 9. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ \ x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

1) Donner une base de F.

2) Trouver deux applications linéaires distinctes de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$ ayant F comme noyau. Quelles sont leurs matrices associées ?

3) Existe-t-il une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$ ayant F comme noyau ?

Exercice 10. Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_4[X]$ définie par

$$\varphi(1) = 3 + X \qquad \varphi(X) = 2X + X^3 - X^4$$
$$\varphi(X^2) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \qquad \varphi(X^3) = 3X^2 + 2X^3 + 4X^4.$$

1) Calculer $\varphi(a_0 + a_1 a_2 X^2 + a_3 X^3)$. Écrire la matrice A de φ dans les bases canoniques.

2) Pour les sous-espaces $\ker(\varphi) \subset \mathbb{R}_3[X]$ et $\operatorname{im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_4[X]$ (dans l'ordre souhaité) (a) déterminer une base, (b) donner des équations en nombre minimal.

3) Reprendre l'exercice en considérant l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$ définie par

$$f(e_1) = (3, 1, 0, 0, 0) \qquad f(e_2) = (0, 2, 0, 1, 0)$$
$$f(e_3) = (1, 1, 1, 1, 1) \qquad f(e_4) = (0, 0, 3, 1, 2),$$

où $(e_1, \ldots, e_4)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

1) Pour chacune de ces matrices, décrire l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (avec n et p convenables) associée dans les bases canoniques.

2) Peut-on former les produits ABC, CBA, BAC ? Si oui les calculer de deux manières pour vérifier sur ce cas particulier l'associativité du produit de matrices.

Exercice 12. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'une base orthonormée (e_1, e_2) – on suppose ici l'existence du produit scalaire usuel. Donner les matrices dans la base canonique des endomorphismes suivants :

1) la rotation ρ d'angle θ

2) la symétrie orthogonale σ par rapport à l'axe engendré par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$.

3) On se place dans $\mathbb{R}^3$. Trouver la matrice dans la base canonique de 'application linéaire qui laisse l'axe (Ox_1) fixe et tourne le plan (Ox_2x_3) avec 60 degrés.

Exercice 13. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère $\varphi : \mathbb{R}[X]_2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $P \mapsto (P(a), P'(a), P''(a))$.

1) Justifier que φ est une application linéaire et donner les matrices associées aux bases $(1, X, X^2)$ et $(1, X - a, (X - a)^2)$ respectivement pour le domaine (espace de départ) de φ. On utilisera la base canonique pour le codomaine (espace d'arrivée).

2) Relier ces deux matrices en utilisant une matrice de changement de base.