L2 — Algèbre linéaire 1 — 2023-2024

Feuille d'exercices n° 2

Bases et dimension d'un espace vectoriel

Exercice 1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (justifier)
1) Toute famille génératrice d'un espace vectoriel contient une base de cet espace vectoriel.
2) La dimension d'un espace est le nombre de vecteurs de cet espace.
3) Toute famille contenant une famille liée est liée.
4) La base de $\mathbb{R}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$.
5) Si $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ et si (u_1, u_2, u_3) est libre alors $\dim E = 3$.
6) $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_{p-1})$ ssi u_p est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{p-1}$.
7) Soient u, v, w trois vecteurs d'un espace vectoriel E. On suppose que $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ et $\{v, w\}$ sont libres, alors la famille $\{u, v, w\}$ est libre.
8) Soient p vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ d'un espace vectoriel E. On suppose qu'aucun de ces vecteurs n'est combinaison linéaire des autres. Alors la famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est libre.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel.
1) Soit $\{u_1, \ldots, u_4\}$ une famille libre de E.
a) On suppose que $\dim E = n$. Quelle inégalité vérifie n ?
b) Les familles suivantes sont-elles libres ?
$(u_1, u_2, 0, u_4)$, $(u_1 + u_2, u_3 + u_4)$, $(u_1, u_2 + u_3 + u_4, u_4)$, $(u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_4, u_4 + u_1)$.
2) Soit $\{u_1, \ldots, u_4\}$ une famille génératrice de E.
a) On suppose que $\dim E = n$. Quelle inégalité vérifie n ?
b) Les familles suivantes sont-elles génératrices ?
$(u_1, u_2, 0, u_4)$, $(u_1 + u_2, u_3 + u_4)$, $(u_1, u_2 + u_3 + u_4, u_4)$, $(u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_4, u_4 + u_1)$.

Description des sous-espaces vectoriels sous formes Vect et équations

Exercice 3. Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ défini par $x + y + z = 0$.
1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Trouver une base de V et justifier que c'en est une.
3) Est-ce que toute personne répondant à cette question, produira-t-elle la même base ? Que peut-on conclure concernant une notion de "base naturelle" pour un sous-espace vectoriel ?

Exercice 4. Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^4$ formé des (x, y, z, t) tels que

$$\begin{cases} 9x + 13y + 30z + 19t = 0 \\ 8x + 9y + 19z + 22t = 0 \\ x - y - 4z + 7t = 0 \end{cases}$$

Exercice 5.
1) Donner une base et la dimension de l'espace vectoriel solution du système

$$\begin{cases} x - y - z - 3s + t = 0 \\ 2x - y + z + t = 0 \\ 2y + 2s + t = 0 \\ x - 2y + 2z + s - t = 0. \end{cases}$$

2) Donner une base et la dimension de $V = \text{Vect}((1, 2, 3, 4), (1, 0, 5, 0), (0, 1, -1, 2))$. Écrire V sous forme "d'équations" (explicitement, donner un système linéaire en quatre variables dont V est la solution).

Exercice 6. *Cette exercice apparaissait sur la feuille n° 1 ; on veut le résoudre d'une autre manière.* Soient $u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, -2, 3, -4)$. Existe-t-il $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}(u, v)$? Même question avec $(x, 1, 1, y)$.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $F = \{(a+b, a-b, a, 0),\ a, b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(y, x, y, x-y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

1) Trouver des bases de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

2) Donner des équations de F, G, $F \cap G$ et $F + G$ en nombre minimal dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8. Soient $U, V \subset \mathbb{R}^4$ définis respectivement par

$$\begin{cases} x + y - 2z + \ \ t = 0 \\ -x + y + \ \ z - 3t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x - 2y + z + 2t = 0 \\ \qquad\ \ y + z - 3t = 0. \end{cases}$$

1) Expliquer pourquoi U et V sont des sous-espaces vectoriels.

2) Déterminer une base de $U \cap V$ et puis étendre cette base à une base de U et par la suite, à une base de $U + V$.

Exercice 9. Dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$, on se donne trois nombres a, b et c distincts deux à deux et on considère les polynômes

$$A = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad B = \frac{(X-c)(X-a)}{(b-c)(b-a)} \quad \text{et} \quad C = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

1) Montrer que $\mathcal{F} = (A, B, C)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

2) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans $\mathcal{F}$ en fonction de $P(a), P(b), P(c)$.

3) Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui vérifie $P(0) = 3$, $P(1) = -2$, $P(2) = 5$. Ce polynôme est-il unique ?

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, soient $P = 1+6X-4X^2$, $Q = 3+2X+4X^2$, $R = 1-X+4X^2$ et $S = 1+3X-2X^2$. On pose $F = \mathrm{Vect}(P, Q)$, $G = \mathrm{Vect}(R, S)$.

1) Déterminer une base puis des équations en nombre minimal dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour F et G.

2) Déterminer une base de $F \cap G$.

3) Que peut-on dire de $F + G$?

Exercice 11. Soient V et W deux sous-espaces vectoriels distincts de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Montrer que $\dim(V \cap W) = 1$. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 12. Soit $F \subset \mathbb{R}^5$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1 = (-2, 0, 2, 6, -2)$, $v_2 = (4, 10, 1, -2, 9)$, $v_3 = (1, 6, 2, 3, 4)$ et $v_4 = (-1, 2, -3, 4, 0)$.

1) Trouver une base et la dimension de F.

2) Trouver un système d'équations homogènes dont l'espace solution soit F.

3) Soit H est l'espace solution de $x_4 = 0$. Trouver un système d'équations homogènes à 4 inconnues, de rang maximal, dont l'espace solution soit le sous-espace vectoriel $F \cap H \subset H$.

Exercice 13 (Carrés magiques)**.** On appelle carré magique de taille 3×3 et de somme S, une matrice $M \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$$

telle que la somme des réels de chaque ligne, la somme des réels de chaque colonne, la somme des réels de chaque diagonale, soient égales à S. Le but de cet exercice est de trouver un procédé de fabrication de tous les carrés magiques.

1) Montrer que tout carré magique de somme S a pour coefficient central $a_5 = \frac{S}{3}$.

2) Trouver un carré magique de somme 3.

3) Montrer que l'ensemble des carrés magiques est un sous-espace vectoriel noté E de $\mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$.

4) Montrer que tout carré magique de somme 0 est défini par la donnée de ses coefficients a_1 et a_3. Montrer que les carrés magiques de somme 0 forment un sous-espace vectoriel E_0 de E. Trouver un base de E_0.

5) Donner une base de E.

6) Utiliser ce qui précède pour dénombrer tous les carrés magiques de somme 18 dont les coefficients sont des entiers positifs.