Algèbre linéaire

Un exercice qui utilise les deux descriptions d'un sous-espace vectoriel

L'exercice suivant est semblable aux exercices 11 et 13 de la première feuille, et au 12 de la deuxième feuille. Il fait apparaître les deux manières de décrire un sous-espace vectoriel :

- explicite, c'est-à-dire par une famille génératrice (ou une base)en utilisant Vect
- implicite, c'est-à-dire comme solution d'un système linéaire homogène.

Remarque. En réfléchissant aux dificultés rencontrées en TD dans l'utilisation de l'algorithme de Gauss, je pense qu'une possible explication serait le passage trop rapide du raisonnement à une écriture l'algorithmique. La solution ci-dessous développe les étapes du raisonnement sans expliciter l'algorithme. Pour l'algorithme et la liaison avec ce qui suit, il faut étudier le fichier précédent, *Un exercice exemple autour de la méthode du pivot.*

Exercice On considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 2, 1, 3)$, $v_3 = (-1, 0, 1, 1)$ et $v_4 = (0, 1, -1, -2)$ de $\mathbb{R}^4$, et on pose

$$S = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_4).$$

1) Extraire de la famille $\{v_1, \ldots, v_4\}$ une base pour le sous-espace vectoriel S ; compléter cette base à une base de $\mathbb{R}^4$.

2) Décrire $S \subset \mathbb{R}^4$ comme solution d'un système linéaire homogène.

Solution.

1) Pour pouvoir extraire une base, il faut étudier les relations de dépendance linéaires entre les vecteurs de la famille $\{v_1, \ldots, v_4\}$, c'est-à-dire il faut déterminer toutes les combinaisons linéaires nulles. Soit

$$t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 + t_4v_4 = 0.$$

En utlisant la forme des vecteurs v_j, on obtient le système linéaire homogène

$$\begin{cases} t_1 + t_2 - t_3 = 0 \\ t_1 + 2t_2 + t_4 = 0 \\ t_2 + t_3 - t_4 = 0 \\ t_1 + 3t_2 + t_3 - 2t_4 = 0. \end{cases} \tag{$*$}$$

On résout le système par **élimination**. On a successivement

$$\begin{cases} t_1 + t_2 - t_3 = 0 \\ t_2 + t_3 + t_4 = 0 \\ t_2 + t_3 - t_4 = 0 \\ 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{en éliminant } t_1 \text{ à l'aide de l'éq. 1}$$

$$\begin{cases} t_1 - 2t_3 - t_4 = 0 \\ t_2 + t_3 + t_4 = 0 \\ - 2t_4 = 0 \\ - 4t_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{en éliminant } t_2 \text{ à l'aide de l'éq. 2}$$

$$\begin{cases} t_1 \qquad - 2t_3 \qquad = 0 \\ \qquad t_2 + \ \ t_3 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad t_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{en éliminant } t_4 \text{ à l'aide de l'éq. } 3 \ /(-2).$$

Lors de la dernière étape, la dernière équation était devenue $0 = 0$, équation toujours vérifiée. En résolvant en fonction de t_3, on obtient

$$\begin{cases} t_1 = 2t_3 \\ t_2 = -t_3 \\ t_4 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire l'ensemble des solutions du système ($*$) est

$$\{(2t_3, -t_3, t_3, 0) \mid t_3 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2, -1, 1, 0)).$$

Donc toute combinaison linéaire nulle et non triviale est de la forme (à un multiple multiplicatif près)

$$2v_1 - v_2 + v_3 = 0.$$

Il s'ensuit que (v_1, v_2, v_4) est une base de $S = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. En particulier $S = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_4)$.

Pour compléter cette base de S à une base de $\mathbb{R}^4$, on rajoute le vecteur de la base canonique dont l'indice est celui de l'équation non utilisée dans la résolution par élimination du système ($*$), c'est-à-dire e_3.

2) Pour répondre à la deuxième question, on considère un vecteur général de l'espace $\mathbb{R}^4$ dans lequel vivent les vecteurs v_j, $1 \leq j \leq 4$. Soit

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4.$$

On appelle les réels x_j les coordonnées de v dans la base canonique $(e_1, \dots, e_4)$.

Pour trouver un système homogène linéaire en les x_j dont l'espace des solutions est S, il faut déteminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que $v \in S$.

On a

$$v \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_4) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \text{ tels que } v = t_1v_1 + t_2v_2 + t_4v_4.$$

À droite on arrive au système linéaire

$$\begin{cases} t_1 + \ \ t_2 \qquad\quad = x_1 \\ t_1 + 2t_2 + \ \ t_4 = x_2 \\ \qquad t_2 - \ \ t_4 = x_3 \\ t_1 + 3t_2 - 2t_4 = x_4. \end{cases} \tag{$**$}$$

On le résout de nouveau par élimination en reprenant éventuellement les calculs précédents. On a successivement

$$\begin{cases} t_1 + \ \ t_2 \qquad\quad = x_1 \\ \qquad t_2 + \ \ t_4 = x_2 - x_1 \\ \qquad t_2 - \ \ t_4 = x_3 \\ \quad 2t_2 - 2t_4 = x_4 - x_1 \end{cases} \qquad \text{en éliminant } t_1 \text{ à l'aide de l'éq. } 1$$

$$\begin{cases} t_1 \qquad - \ t_4 = x_1 - (-x_1 + x_2) \\ \quad t_2 + \ t_4 = -x_1 + x_2 \\ \qquad - 2t_4 = x_3 - (-x_1 + x_2) \\ \qquad - 4t_4 = x_4 - x_1 - 2(-x_1 + x_2) \end{cases} \qquad \text{en éliminant } t_2 \text{ à l'aide de l'éq. 2}$$

$$\begin{cases} t_1 \qquad - \ t_4 = 2x_1 - x_2 \\ \quad t_2 + \ t_4 = -x_1 + x_2 \\ \qquad - 2t_4 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \qquad 0 \quad = x_1 - 2x_2 + x_4 - 2(x_1 - x_2 + x_3) \end{cases} \qquad \text{en éliminant (partiellement) } t_4 \text{ à l'aide de l'éq. 3.}$$

Ce système linéaire en t_1, t_2 et t_4 admet une solution si, et seulement si, le membre de droite de la dernière équation est nul, c'est-à-dire

$$0 = x_1 - 2x_2 + x_4 - 2(x_1 - x_2 + x_3) = -x_1 - 2x_3 + x_4.$$

On conclut que

$$S : x_1 + 2x_3 - x_4 = 0.$$