Exercice 3 de la feuille no 4

On considère l'endomorphisme $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 30 & 11 & 70 \\ -6 & -2 & -13 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer A^2 et conclure que p est une projection vectorielle.

2) Pour $v_1 = (1, -3, 0)$ et $v_2 = (2, 1, -1)$, calculer $p(v_1)$ et $p(v_2)$. Calculer aussi $\ker(p)$. Si v_3 est un générateur de $\ker(p)$ dont les coordonnées dans la base canonique sont des entiers premiers entre eux, montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Donner la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ sans calcul (en justifiant la réponse).

4) Calculer les matrices de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$.

5) Vérifier par le calcul de changement de base la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

6) En supposant que les vecteurs v_1 et v_2 n'étaient pas données, comment les choisiriez-vous ?

Solution.

1) On a $A^2 = A$, donc $p^2 = p$, c'est-à-dire p est une projection vectorielle. On se rappelle qu'alors $\mathbb{R}^3 = \ker(p) \oplus \operatorname{im}(p)$.

2) Les coordonnées dans la base canonique de $p(v_1)$ sont obtenues en calculant

$$A \cdot C_{\mathcal{C}}(v_1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 30 & 11 & 70 \\ -6 & -2 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{C}$ est la base canonique. Donc $p(v_1) = v_1$ et, par un calcul similaire, $p(v_2) = v_2$.

On a

$$\ker(p) = \{(x, y, z) \mid p((x, y, z)) = 0\} = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

On applique l'algorithme de Gauss pour obtenir

$$\ker(p) = \operatorname{Vect}((1, 10, -2)) =: \operatorname{Vect}(v_3).$$

Pour voir que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base, ou bien on invoque la théorie, ou bien on peut dire que si

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0,$$

alors, en appliquant p, on obtient

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0,$$

donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, et par conséquent $\alpha_3 = 0$.

3) Comme $p(v_1) = v_1$, $p(v_2) = v_2$ et $p(v_3) = 0$, on a

$$M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

4) On a

$$\mathrm{Pass}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =: P$$

et

$$\mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -19 \\ 6 & 2 & 13 \\ -3 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

N'oubliez pas ! Un résultat en algèbre linéaire peut presque toujours être vérifié. Ici, après avoir calculé l'inverse d eP, on peut vérifier l'identité $PP^{-1} = I_3$.

5) On calcule la matrice associée à p dans la base $\mathcal{B}$ en considérant sa matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$ ainsi que les matrices de passage entre les deux bases. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) &= \mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\ \mathrm{Pass}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P^{-1}\,A\,P \\
&= \begin{pmatrix} -8 & -3 & -19 \\ 6 & 2 & 13 \\ -3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 30 & 11 & 70 \\ -6 & -2 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -8 & -3 & -19 \\ 6 & 2 & 13 \\ -3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

6) On aurait du calculer l'image de p, c'est-à-dire le sous-espace engendré par les colonnes de A.