

Cours d'algèbre linéaire 1

Sommaire

1	Systèmes linéaires et pivot de Gauss	1
1.1	Un problème d'abord	1
1.2	Systèmes linéaires et le pivot de Gauss	2
1.3	Résoudre un système échelonné	3
1.4	Vecteurs colonnes de $\mathbb{K}^n$, combinaisons linéaires	3
2	Familles génératrices, familles libres, bases	4
2.1	Sous-espaces vectoriels	5
2.2	Familles génératrices, sous-espace engendré	5
2.3	Familles libres	6
2.4	Rappels : le produit matriciel	7
2.5	Bases	8

1. Systèmes linéaires et pivot de Gauss

1.1. Un problème d'abord

On considère trois plans dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ définis par

$$2x + y + z = 11, \quad x + 2y + z = 9, \quad \text{et} \quad x + y + 2z = 10,$$

où x , y et z sont les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$. On veut étudier leur intersection. On a le système linéaire

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ x + 2y + z = 9 \\ x + y + 2z = 10. \end{cases} \quad (\#)$$

Aucune structure algébrique n'est visible dans cet énoncé ; pourtant, apprendre à résoudre ce type de système de manière systématique va, chemin faisant, faire apparaître tous les objets des sections suivantes : vecteurs, combinaisons linéaires, sous-espaces, bases, rang, dimension.

Remarque. Au même système on arrive en résolvant le problème suivant. Noter que “les données” apparaissent en colonne ici !

Une boulangerie fabrique trois préparations à partir de farine, de beurre et de sucre. Une tarte demande 2 portions de farine, 1 de beurre, 1 de sucre ; un cake, 1, 2, 1 ; un biscuit, 1, 1, 2. Le stock du jour : 11, 9 et 10 portions. Combien fabriquer de chaque préparation (on suppose qu'on ne peut pas fabriquer une fraction d'un biscuit) pour épuiser exactement le stock ? Ce problème est-il résoluble ?

1.2. Systèmes linéaires et le pivot de Gauss

Définition. Une *équation linéaire* à n inconnues $x_1, \dots, x_n$ s'écrit $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ avec $a_i, b \in \mathbb{K}$ pour tout i ; elle est dite *homogène* si $b = 0$.

Une collection $L_1, \dots, L_m$ d'équations avec les mêmes inconnues forme un *système linéaire* $(L_\bullet)$. Il est dit homogène si toutes les équations le sont. On note $\text{Sol}(L_\bullet) \subset \mathbb{K}^n$ son *ensemble des solutions*.

Un système peut n'avoir aucune solution, une seule, ou une infinité. Le but de cette section est de trancher, pour un système donné, et de décrire $\text{Sol}(L_\bullet)$ explicitement.

Exemple (modèle). L'équation $ax = b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, n'a aucune solution si $a = 0$ et $b \neq 0$, a l'unique solution b/a si $a \neq 0$, et a une infinité de solutions si $a = b = 0$.

Trois opérations transforment un système sans changer son ensemble des solutions — chacune est réversible par une opération du même type, ce qui suffit à le voir :

- (i) multiplier une équation L_i par $\lambda \neq 0$
- (ii) remplacer une équation L_i par $L_i + \mu L_j$ ($\mu \in \mathbb{K}$, $j \neq i$)
- (iii) permuter deux équations.

On dit que deux systèmes reliés par de telles opérations sont *équivalents*. Sur l'exemple de la boulangerie (de départ), $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1$ éliminent x des deux dernières lignes.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

En faisant $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_2$, on élimine y de la (nouvelle) dernière équation :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{7}{2} \\ \frac{4}{3}z = \frac{10}{3}. \end{cases}$$

Définition 1.1. Un système $(L_\bullet)$ à n inconnues est *échelonné* s'il existe r tel que le premier coefficient non nul de L_i est en position j_i , avec $j_1 < \dots < j_r$ strictement croissante, et les équations $L_{r+1}, \dots, L_m$ n'ont que des coefficients nuls. On appelle $r = \text{rg}(L_\bullet)$ le *rang* du système; les inconnues $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ sont appelées les *inconnues pivots*, les $n - r$ autres sont appelées les *paramètres*.

Théorème 1.2 (Pivot de Gauss). *Tout système est équivalent à un système échelonné.*

Démonstration. Le procédé utilisé ci-dessus se généralise : on permute les équations pour amener en première position celle dont le premier coefficient non nul a l'indice le plus petit, on l'utilise comme pivot pour éliminer cette inconnue des autres équations, puis on recommence sur les équations restantes. Le nombre d'équations à traiter diminue à chaque étape : le procédé s'arrête, sur un système échelonné. $\square$

Les permutations ne servent qu'à ranger l'escalier ; en pratique on laisse les équations en place.

Remarque. Sur notre exemple, $r = n = 3$: aucune inconnue paramètre.

Exemple. Le système homogène ci-dessous ($m = 4$, $n = 6$) est échelonné de rang 4 ; x_2 et x_4 sont paramètres.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 & + x_6 = 0 \\ & 3x_3 & + 2x_5 & = 0 \\ & & - x_5 + x_6 = 0 \\ & & & 5x_6 = 0. \end{cases} \quad (\text{b})$$

1.3. Résoudre un système échelonné

Une fois échelonné, un système se résout en remontant : la dernière équation utile (L_r) donne x_{j_r} en fonction des paramètres qui la suivent ; on reporte dans L_{r-1} , et ainsi de suite jusqu'à L_1 . Les paramètres, eux, sont libres.

- Si $r < m$ et qu'une équation $L_{r+1}, \dots, L_m$ a un second membre non nul, il n'y a aucune solution.
- $\text{Sol}(L_\bullet)$ est un point unique exactement quand $r = n$ (aucun paramètre).
- Sinon, l'ensemble des solutions est infini (il y a au moins un paramètre).

Sur l'exemple de la boulangerie¹ ($r = n = 3$), c'est-à-dire la solution est unique : $z = 5/2$, $y = 7/2$, $x = 9/2$. Sur l'exemple (b), on a le rang $r = 4$ et les paramètres $x_2 = s$, $x_4 = t$. En remontant depuis L_4 , on a

$$(x_1, \dots, x_6) = \left(\frac{1}{5}s + \frac{2}{5}t, s, 0, t, 0, 0\right), \quad s, t \in \mathbb{K}.$$

1.4. Vecteurs colonnes de $\mathbb{K}^n$, combinaisons linéaires

Un système linéaire a une écriture matricielle, $Ax = b$, avec $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $b \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Pour le système (‡), la matrice est carrée symétrique.

- L'échelonnement du système correspond à un échelonnement de la matrice $(A|b)$.
- La matrice A est appelée la *matrice associée au système* et la matrice $(A|b)$ la *matrice étendue*.
- Pour le système $(L_\bullet)$ avec matrice étendue $(A|b)$, on note

$$\text{Sol}(A, b) := \text{Sol}(L_\bullet).$$

Définition. $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des n -uplets $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i \in \mathbb{K}$, muni de $\mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n)$ et $\lambda \mathbf{p} = (\lambda p_1, \dots, \lambda p_n)$. Une *combinaison linéaire* de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Remarque 1.3. Ici, $(p_1, \dots, p_n)$ désigne un élément de $\mathbb{K}^n$ — un vecteur ou un point si on étudie la géométrie de l'espace. On le représente comme *vecteur colonne*, c'est-à-dire comme matrice de taille $n \times 1$ quand on résout des systèmes linéaires. C'est le même n -uplet. Plus loin, un n -uplet désignera aussi les *coordonnées* d'un vecteur d'un espace E quelconque dans une **base choisie**. Le n -uplet désignera le vecteur, ou plutôt identifiera le vecteur. Mais il sera toujours un élément de $\mathbb{K}^n$. L'identification dépendra **du choix de la base**. Les deux usages coïncident pour $E = \mathbb{K}^n$ et la base canonique — à s'en rappeler au moment du changement de base.

1. Le problème de la pâtisserie n'est pas résoluble.

La solution générale ci-dessus devient

$$(x_1, \dots, x_6) = s \cdot \left(\frac{1}{5}, 1, 0, 0, 0, 0\right) + t \cdot \left(\frac{2}{5}, 0, 0, 1, 0, 0\right), \quad s, t \in \mathbb{K} :$$

toute solution est combinaison linéaire de deux vecteurs fixes, et ces deux vecteurs suffisent à toutes les décrire — ce que dans la section 2 on appellera une *base* de $\text{Sol}(L_\bullet)$.

Deux propriétés à noter pour la suite concernant l'espace des solutions d'un système *homogène* $(L_\bullet)$.

- Si $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \text{Sol}(L_\bullet)$, alors $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ et $\lambda \mathbf{p}$ y sont encore — immédiat sur les équations. L'ensemble des solutions n'est donc pas un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{K}^n$. On dira que les solutions forment un *sous-espace vectoriel*.
- Le nombre de vecteurs nécessaires pour décrire $\text{Sol}(L_\bullet)$ ci-dessus est $n - r = 2$. Ce sera la *dimension* de la section ??, et elle se lira directement sur le rang du système échelonné, sans argument supplémentaire :

$$\text{dimension} = \#\{\text{inconnues}\} - \#\{\text{pivots}\} = \#\{\text{paramètres}\}.$$

En résolvant systématiquement des systèmes linéaires, nous avons rencontré :

- les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et les combinaisons linéaires
- un premier sous-espace vectoriel (l'ensemble des solutions d'un système homogène) et sa description par un petit nombre de vecteurs (future notion de base)
- le rang r d'un système échelonné et le nombre $n - r$ de paramètres (future dimension).

La section 2 reprend ces observations pour les énoncer en toute généralité — et, chaque fois que possible, en lisant la réponse directement sur une matrice échelonnée plutôt qu'en invoquant un argument abstrait d'existence.

Remarque 1.4 (La permutation des lignes I). Permuter les équations est gratuit et invisible — un système ne dépend pas de l'ordre de ses équations, et les permutations ne servent qu'à afficher l'escalier (c'est-à-dire le système échelonné). C'est seulement quand **le tableau devient un objet à part entière**, avec des places (i, j) qui ont un sens (ligne = coordonnée de $\mathbb{K}^n$, colonne = vecteur), que la permutation cesse d'être neutre : elle détruit une information dont on aura besoin.

2. Familles génératrices, familles libres, bases

Dans la section précédente, la solution générale d'un système homogène s'est écrite comme combinaison linéaire d'un petit nombre de vecteurs, et nous avons annoncé que ces vecteurs formeraient une *base* de l'ensemble des solutions. Cette section définit les notions en jeu — engendrer, être libre, être une base — puis montre que le pivot de Gauss répond à chacune des questions qu'elles posent. Les définitions sont données dans un espace vectoriel quelconque ; le calcul, lui, se fait dans $\mathbb{K}^n$.

2.1. Sous-espaces vectoriels

Définition 2.1. Un ensemble E est un *espace vectoriel* sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ s'il est muni d'une addition et d'une multiplication avec les éléments de $\mathbb{K}$ telles que pour tous $u, v, w \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

- (i) $u + v \in E$ et $\lambda v \in E$
- (ii) $u + (v + w) = (u + v) + w \in E$ — associativité de la somme
- (iii) $u + v = v + u$ — commutativité de la somme
- (iv) il existe $0 \in E$ tel que $v + 0 = 0 + v = v$ — existence de l'élément neutre pour la somme
- (v) il existe $-v \in E$ tel que $-v + v = v + (-v) = 0$ — existence de l'inverse pour la somme
- (vi) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ — compatibilité des produits
- (vii) $1 v = v$
- (viii) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ — distributivité
- (ix) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ — distributivité

Définition 2.2. Une partie F d'un espace vectoriel E est un *sous-espace vectoriel* si elle contient 0 et est stable par addition et par multiplication par un scalaire : pour tous $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $u + v \in F$ et $\lambda u \in F$.

Un sous-espace est donc lui-même un espace vectoriel, pour les opérations de E . Notre premier exemple vient de la section 1 :

Exemple. L'ensemble des solutions d'un système linéaire *homogène* à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ — on l'a vérifié directement sur les équations. En revanche, si le système n'est pas homogène, 0 n'est pas solution et $\text{Sol}(L_\bullet)$ n'est pas un sous-espace.

Exemple 2.3 (important). L'ensemble des polynômes en X et à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $\leq n$ est un espace vectoriel, noté $\mathbb{K}_n[X]$.

On peut identifier facilement $\mathbb{K}_n[X]$ avec $\mathbb{K}^{n+1}$, par la correspondance

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \longleftrightarrow (a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Lemme 2.4. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un sous-ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si F est non vide et toute combinaison linéaire avec des vecteurs de F est dans F .

2.2. Familles génératrices, sous-espace engendré

Définition 2.5. Une famille $v_1, \dots, v_k$ de E est *génératrice* (de E) si tout élément de E est combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_k$.

Lemme-Définition 2.6. Pour toute famille $v_1, \dots, v_k$ de E , l'ensemble de leurs combinaisons linéaires

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E , appelé sous-espace engendré. C'est le plus petit sous-espace contenant les v_i : la famille est génératrice de ce sous-espace.

Démonstration. Stabilité immédiate : une somme de deux combinaisons linéaires des $\mathbf{v}_i$, ou le produit de l'une par un scalaire, en est encore une. Tout sous-espace contenant les $\mathbf{v}_i$ contient leurs combinaisons linéaires, donc contient $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$: c'est bien le plus petit. $\square$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, l'équation $2x - y - 3z = 0$ décrit $\{(x, 2x - 3z, z)\} = \text{Vect}((1, 2, 0), (0, -3, 1))$, un sous-espace engendré par deux vecteurs. Résoudre le système homogène (ici, une seule équation) *produit directement* une famille génératrice du sous-espace des solutions — c'est ce que faisait le pivot dans la section 1.

2.3. Familles libres

Définition 2.7. Une famille $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ est *liée* s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *non tous nuls* tels que $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$; une telle égalité est une *relation de dépendance*. La famille est *libre* sinon — la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison triviale (celle aux coefficients tous nuls).²

Dans $\mathbb{K}^n$, la famille $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ est libre si et seulement si le système homogène

$$x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

d'inconnues $x_1, \dots, x_k$ n'a que la solution nulle. **C'est le pont avec la section 1** : étudier la liberté d'une famille, c'est résoudre un système homogène.

Lire liberté et dépendance sur le tableau — Rangeons $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{K}^n$ **en colonnes** dans un tableau ou matrice A (à n lignes, k colonnes). Le système $x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ n'est autre que le système homogène associé à A , aux inconnues $x_1, \dots, x_k$ — une inconnue *par vecteur*, c'est-à-dire par colonne. On l'échelonne par opérations sur les *lignes* (celles de la section 1 : elles ne changent pas l'ensemble des solutions, donc ne changent aucune relation de dépendance entre les $\mathbf{v}_i$).

Sur le tableau échelonné, notons $j_1 < \dots < j_r$ les indices des colonnes pivots. Alors :

- **Liberté.** La famille est libre si et seulement si toutes les colonnes sont pivots ($r = k$) : le système homogène n'a alors aucune inconnue paramètre, donc que la solution nulle.
- **Dépendance explicite.** Si une colonne j n'est pas pivot, l'inconnue x_j est un paramètre ; en lui donnant la valeur 1 et en résolvant, on obtient une relation de dépendance concrète, c'est-à-dire une écriture de $\mathbf{v}_j$ comme combinaison des colonnes pivots qui le précèdent.

Insistons sur un point qui évite une erreur fréquente : l'échelonnement se fait par opérations sur les *lignes*, et ces opérations *modifient* les colonnes. Les colonnes du tableau échelonné ne sont donc plus les vecteurs $\mathbf{v}_i$. Ce que le calcul fournit, ce sont les *indices* $j_1, \dots, j_r$; on revient ensuite au *tableau initial* pour désigner les vecteurs correspondants. L'algorithme **sélectionne des vecteurs parmi les $\mathbf{v}_i$** , il n'en fabrique pas de nouveaux.

Remarque 2.8 (importante). L'algorithme de Gauss appliqué à une matrice A produit une matrice échelonnée U .

2. En explicitant les quantificateurs : la famille est liée si

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}, \quad \text{tels que} \quad \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \exists j \in \{1, \dots, k\}, \lambda_j \neq 0.$$

La négation est

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}, \lambda_j = 0.$$

1. L'algorithme change les colonnes et, en général $\text{Vect}(\text{colonnes de } A) \neq \text{Vect}(\text{colonnes de } U)$.
2. Les relations de dépendance linéaires entre les colonnes de A et celles entre les colonnes de U **sont les mêmes**.

Remarque 2.9 (la place des pivots — la permutation des lignes II). Dans la section 1, permuter deux équations était gratuit : un système ne dépend pas de l'ordre de ses équations, et les permutations ne servaient qu'à *afficher* l'escalier. Sur un tableau, en revanche, chaque coefficient a une place (i, j) , et cette place a un sens : la ligne i dit dans quelle *coordonnée* de $\mathbb{K}^n$ on lit, la colonne j dit de quel *vecteur* il s'agit.

C'est pourquoi, en pratique, on échelonne **sans permuter les lignes** : on choisit une ligne non encore utilisée dont le coefficient dans la colonne courante est non nul, on s'en sert pour éliminer cette colonne dans *toutes* les autres lignes, et on la laisse où elle est. Le tableau obtenu n'est plus échelonné au sens strict — il le devient après rangement des lignes —, et tout ce qui se lit sur les *colonnes* (rang, colonnes pivots, relations de dépendance) est inchangé, puisque les deux tableaux ne diffèrent que par une permutation des lignes. Mais on dispose en plus, pour chaque colonne pivot j , de l'indice i_j de la ligne qui porte ce pivot : on parlera de la *position* (i_j, j) du pivot. La section ?? en fera usage.

2.4. Rappels : le produit matriciel

On rappelle la signification du produit matriciel, de l'écriture Ax , où A est une matrice de taille $m \times n$ et x une matrice colonne $n \times 1$.

Définition 2.10. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de colonnes $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ et soit $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose

$$A\mathbf{q} := q_1\mathbf{a}_1 + \dots + q_n\mathbf{a}_n \in \mathbb{K}^m.$$

Si $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a pour colonnes $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$, le *produit* $AB \in \text{Mat}_{m,p}(\mathbb{K})$ est la matrice de colonnes

$$AB := \begin{pmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \dots & A\mathbf{b}_p \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : **multiplier A par $\mathbf{q}$ à droite, c'est prendre une combinaison linéaire des colonnes de A** , les scalaires étant les composantes de $\mathbf{q}$. Multiplier deux matrices, c'est le faire colonne par colonne. On retrouve la formule usuelle

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

en lisant la i -ème coordonnée de $A\mathbf{b}_j$.

Remarque. Avec cette définition, le système linéaire $AX = b$ pose la question : *b est-il combinaison linéaire des colonnes de A ?* — ce sera la preuve du théorème ??.

Proposition 2.11. Pour $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$A(\mathbf{q} + \mathbf{q}') = A\mathbf{q} + A\mathbf{q}', \quad A(\lambda\mathbf{q}) = \lambda(A\mathbf{q}).$$

De plus, le produit est associatif, c'est-à-dire $(AB)C = A(BC)$.

Démonstration. Les deux premières égalités sont la commutativité et l’associativité des combinaisons linéaires. Pour la troisième, il suffit (par définition du produit, colonne par colonne) de la vérifier quand $C = \mathbf{c}$ est une seule colonne. Si $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_p)$ et $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$ sont les colonnes de B , alors $B\mathbf{c} = \sum_j c_j \mathbf{b}_j$, donc, par linéarité,

$$A(B\mathbf{c}) = \sum_j c_j (A\mathbf{b}_j) = (AB)\mathbf{c},$$

la dernière égalité étant la définition de AB appliquée à $\mathbf{c}$. $\square$

2.5. Bases

Définition 2.12. Une famille est une *base* de E si elle est à la fois libre et génératrice de E .

De façon équivalente, $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ est une base si tout élément de E s’écrit de *manière unique* comme combinaison linéaire des $\mathbf{v}_j$: l’existence de l’écriture, c’est “génératrice” ; son unicité, c’est “libre” (deux écritures d’un même vecteur donneraient, par différence, une relation de dépendance). Les coefficients de cette écriture unique sont les *coordonnées* du vecteur dans la base — et c’est ici que le n -uplet de scalaires cesse de désigner un point de $\mathbb{K}^n$ pour désigner des coordonnées, comme annoncé dans la section 1.

Exemple. La base *canonique* de $\mathbb{K}^n$ est $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, où $\mathbf{e}_j$ a toutes ses composantes nulles sauf la j -ème, égale à 1. Les coordonnées de $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ dans cette base sont $p_1, \dots, p_n$ eux-mêmes — d’où la coïncidence signalée entre un vecteur de $\mathbb{K}^n$ et ses coordonnées.

Tout le travail précédent mène au théorème de la base extraite, dont l’algorithme du pivot de Gauss fournit directement la preuve.

Théorème 2.13 (de la base extraite). *De toute famille génératrice finie d’un sous-espace $F \subset \mathbb{K}^n$ on peut **extraire** une base de F .*

Démonstration. Soit $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ une famille génératrice de F . Rangeons-la en colonnes et échelonnons par lignes (voir la section 2.3) ; soient $j_1 < \dots < j_r$ les indices des colonnes pivots. Montrons que $\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_r}$ est une base de F .

Libre : la sous-famille des colonnes pivots n’a que des pivots, donc est libre.

Génératrice : chaque vecteur non retenu $\mathbf{v}_j$ (colonne non pivot) s’exprime, on l’a vu, comme combinaison des colonnes pivots qui le précèdent — donc des $\mathbf{v}_{j_i}$. Ainsi tout $\mathbf{v}_j$ est dans $\text{Vect}(\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_r})$, et comme tous les $\mathbf{v}_j$ engendrent F , ces r vecteurs l’engendrent aussi. $\square$

Remarque. La preuve ne se contente pas d’affirmer l’existence d’une base : elle en exhibe une (les vecteurs d’indice pivot), et fournit en même temps, pour chaque vecteur écarté, son écriture explicite dans cette base. Existence et vérification tiennent dans le même calcul.

Exemple. Soit $F = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \subset \mathbb{R}^3$ avec

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (2, 2, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 1, 1), \mathbf{v}_4 = (1, 0, -1).$$

En rangeant ces vecteurs en colonnes et en échelonnant par lignes, on trouve les colonnes pivots $j_1 = 1, j_2 = 3$ (les colonnes 2 et 4 sont paramètres). Donc $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$ est une base extraite de F , et le calcul donne au passage $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$.

Trois notions abstraites — génératrice, libre, base —, une seule opération pour les tester : ranger les vecteurs en colonnes et échelonner par lignes. La liberté se lit (toutes colonnes pivots), la dépendance s'explique (colonnes paramètres), et une base s'*extraît* en gardant les vecteurs d'indice pivot.

La prochaine section montre que le nombre r de vecteurs d'une base extraite ne dépend pas des choix faits — c'est la *dimension* de F , déjà entrevue dans la section 1. Pour ces sous-espaces décrits comme ensembles des solutions, la dimension apparaissait sous la forme du nombre $n - r$ de paramètres.

Théorème 2.14 (de la base incomplète). *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, et soit $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ une famille libre d'éléments de F . Si $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q)$ est une famille génératrice de F , alors on peut compléter les vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ en une base de F à l'aide de certains des $\mathbf{w}_j$.*

Démonstration. Rangeons en colonnes, dans cet ordre, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ puis $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q$, et échelon-nons par lignes comme au théorème 2.13. La famille ainsi formée est génératrice de F (elle contient déjà les $\mathbf{w}_j$). Comme $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ est libre, aucune de ces p premières colonnes n'est combinaison des précédentes : elles sont toutes pivots. L'extraction fournit donc une base de F qui contient les vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ en entier, complétée par les $\mathbf{w}_j$ dont la colonne s'avère être pivot. $\square$

Remarque. Comme pour le théorème d'extraction, la preuve n'est pas seulement un argument d'existence : le calcul dit explicitement *quels* $\mathbf{w}_j$ ajouter, et dans quel ordre.