Algèbre linéaire I – 2026-2027

Contrôle continu n° 1
20 octobre, 2026 — 8 : 30 – 10 : 00

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone, ...) n'est autorisé.
Il faut **marquer votre groupe** sur la copie dans le coin en haut à droite.

Exercice 1. On considère le sous-ensemble $E = \{(x, y) \mid 2x - |y| = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Est-il un sous-espace vectoriel ? Justifier votre réponse.

Solution.
Le sous-ensemble E n'est pas un sous-espace vectoriel. Son représentation graphique suggère un argument. On a

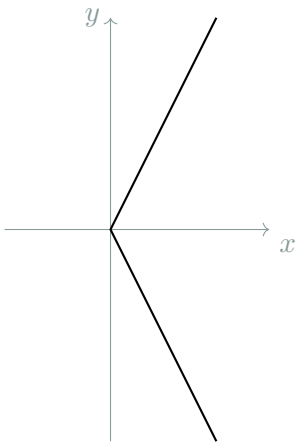


Figure 1 – $\{(x, y) \mid 2x - |y| = 0\}$

$$u = (1, 2) \in E \qquad \text{et} \qquad v = (1, -2) \in E,$$

mais

$$u + v = (2, 0) \notin E.$$

Exercice 2. Décider de la véracité de chacune des affirmations suivantes en donnant une justification ou un contre-exemple.

1) Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E. Alors $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$.

2) Soit $\mathcal{F}$ une famille de E telle que toute sous-famille stricte de $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire si toute sous-famille $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$) est libre alors $\mathcal{F}$ est libre

3) Soient $\mathcal{F}$ une famille libre de E et v un vecteur de E tels que

$$\dim(\text{Vect}(\mathcal{F}, v)) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) + 1$$

Alors $\mathcal{F} \cup \{v\}$ est une famille libre.

Solution.

1) Non. Par exemple la famille $((1, 0), (0, 1), (1, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ et est de cardinal 3.

2) Non, en utilisant le même exemple (la famille est liée).

3) Oui. Pour voir ceci, on note $n = |\mathcal{F}|$. On a

$$n + 1 \geq \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}, v))$$

avec égalité si et seulement si la famille $\mathcal{F} \cup \{v\}$ est libre. Mais, en utilisant les deux hypothèses (pour les deux égalités),

$$n+1 \geq \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}, v)) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})) + 1 = n+1,$$

donc l'inégalité est une égalité.

Exercice 3. On considère la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ de $\mathbb{R}^5$, où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \\ -10 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

1) La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?

2) Quelle est la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$?

3) Donner une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^5$.

Solution.
On applique l'algorithme du pivot en travaillant avec les lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & -2 & 4 \\ -4 & 10 & \boxed{1} & -10 \\ 5 & -7 & 0 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 13 & -29 & 0 & 34 \\ 18 & -44 & 0 & 49 \\ -5 & 17 & 0 & -16 \\ -4 & 10 & 1 & -10 \\ 5 & -7 & 0 & 11 \end{pmatrix} \overset{L2 \leftarrow L2-L1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 13 & -29 & 0 & 34 \\ 5 & -15 & 0 & 15 \\ -5 & 17 & 0 & -16 \\ -4 & 10 & 1 & -10 \\ 5 & -7 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

On multiplie la ligne 2 par $1/5$ (c'est-à-dire $L2 \leftarrow L2/5$) et on poursuit avec le pivot "le plus simple" :

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 13 & -29 & 0 & 34 \\ \boxed{1} & -3 & 0 & 3 \\ -5 & 17 & 0 & -16 \\ -4 & 10 & 1 & -10 \\ 5 & -7 & 0 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & \boxed{-1} \\ -4 & 10 & 1 & -10 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 10 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice échelonnée a trois pivots.

1) La famille n'est pas libre. Une base de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est $\mathcal{B} = (v_1, v_3, v_4)$ — les indices des vecteurs choisis sont les indices des colonnes pivots.

2) La dimension est 3, le nombre de pivots.

3) Une base de $\mathbb{R}^5$ qui complète la base $\mathcal{B}$ est $(v_1, v_3, v_4, e_1, e_5)$. On a rajouté les vecteurs de la base canonique dont les indices correspondent aux lignes nulles dans la matrice échelonnée.

Exercice 4. On considère le système linéaire

$$\begin{cases} 2x_2 - 4x_3 = t_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = t_2 \\ -x_1 + 3x_2 + mx_3 = t_3 \end{cases}$$

avec $m, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$.

1) Résoudre le système si $m = -3$. Discuter la solution en fonction des constantes t_1, t_2, t_3.

2) Même question pour $m = -5$.

3) Quelle condition doivent satisfaire les constantes t_1, t_2, t_3 pour que le système ait au moins une solution pour toute valeur de m ? Justifier votre réponse.

Solution.

On applique le pivot de Gauss au système linéaire en x_1, x_2 et x_3, et dans lequel m est un paramètre réel. On a successivement,

$$\left\{\begin{array}{rrrl} & 2x_2 & -4x_3 = t_1 & \\ x_1 & -x_2 & +x_3 = t_2 & \rightsquigarrow \\ -x_1 & +3x_2 & +mx_3 = t_3 & \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rrrl} & 2x_2 & -4x_3 = t_1 & \\ x_1 & -x_2 & +x_3 = t_2 & \\ & 2x_2 & +(m+1)x_3 = t_2 + t_3 & \end{array}\right.$$

On multiplie la première équation par $1/2$ et on poursuit :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} & x_2 & -2x_3 = \frac{1}{2}t_1 & \\ x_1 & -x_2 & +x_3 = t_2 & \rightsquigarrow \\ & 2x_2 & +(m+1)x_3 = t_2 + t_3 & \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rrrl} & x_2 & -2x_3 = \frac{1}{2}t_1 & \\ x_1 & & -x_3 = \frac{1}{2}t_1 + t_2 & \\ & & (m+5)x_3 = -t_1 + t_2 + t_3 & \end{array}\right.$$

1) Pour $m = -3$, la dernière forme du système devient

$$\left\{\begin{array}{rrrl} & x_2 & -2x_3 = \frac{1}{2}t_1 & \\ x_1 & & -x_3 = \frac{1}{2}t_1 + t_2 & \\ & & 2x_3 = -t_1 + t_2 + t_3 & \end{array}\right.$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{rrrl} & x_2 & -2x_3 = \frac{1}{2}t_1 & \\ x_1 & & -x_3 = \frac{1}{2}t_1 + t_2 & \\ & & x_3 = -\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3 & \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2}t_1 + t_2 + t_3 \\ x_1 = \frac{3}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3 \\ x_3 = -\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3. \end{array}\right.$$

Donc le système a la solution unique

$$x_1 = \frac{3}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3, \quad x_2 = -\frac{1}{2}t_1 + t_2 + t_3 \quad \text{et} \quad x_3 = -\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3.$$

2) Pour $m = -5$ la dernière forme du système devient le sysème échelonné réduit

$$\left\{\begin{array}{rrrl} & x_2 & -2x_3 = \frac{1}{2}t_1 & \\ x_1 & & -x_3 = \frac{1}{2}t_1 + t_2 & \\ & & 0 = -t_1 + t_2 + t_3. & \end{array}\right.$$

Le système est résoluble si et seulement si $-t_1 + t_2 + t_3 = 0$ (condition de compatibilité). Dans ce cas, l'ensemble des solurions est

$$\left\{ (\frac{1}{2}t_1 + 2x_3, \frac{1}{2}t_1 + t_2 + x_3, x_3) \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left(\frac{1}{2}t_1, \frac{1}{2}t_1 + t_2, 0\right) + \text{Vect}((2,1,1))$$

3) Le raisonnement fait en 1) reste le même tant que $m \neq -5$, c'est-à-dire tant que $m+5$ est un pivot. Il s'ensuit que le système admet une solution unique pour tout $m \neq -5$ et admet des solutions pour $m = -5$ si et seulement si $-t_1 + t_2 + t_3 = 0$. La condition recherchée est donc

$$t_1 - t_2 - t_3 = 0.$$

Barème indicatif : 2 — 6 — 6 — 6