

II Symboles de Christoffel

Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ orientée

Soit $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ un système de coordonnées sur une ouvert de S

$\left(\frac{\partial X}{\partial u}(p), \frac{\partial X}{\partial v}(p), N(p) \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Exprimons dans cette base

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_1 N$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_2 N$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} = \Gamma_{21}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_2 N$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_3 N$$

$$\Gamma_{ij}^1 = \text{coef de } \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \text{ ou } u_1 = u \text{ pour } \frac{\partial X}{\partial u}$$

$$\Gamma_{ij}^2 = \text{coef de } \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \text{ ou } u_2 = v \text{ pour } \frac{\partial X}{\partial v}$$

Les coefficients Γ_{ij}^k sont appelés les symboles de Christoffel

Comme $\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$, $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2$
 et $L_2 = \overline{L_2}$

Les symboles de Christoffel sont symétriques par rapport aux indices en bas

En faisant le produit scalaire avec N , on trouve

$$L_1 = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \cdot N = e$$

$$L_2 = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \cdot N = f$$

$$L_3 = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \cdot N = g$$

où e , f et g sont les coefficients de la deuxième forme fondamentale de S .

Pour calculer les symboles de Christoffel, on fait le produit scalaire avec $\frac{\partial X}{\partial u}$ et $\frac{\partial X}{\partial v}$

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} \\ &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}$$

$$\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{\partial^2 x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \end{cases}$$

Le déterminant de chacun de ces 3 systèmes
de 2 équations d'inconnues Γ_{ij}^1 et Γ_{ij}^2

$$\text{est } EG - F^2 = \left\| \frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \right\|^2 \neq 0$$

donc les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k au point p
s'exprime en fonction des coefficients de la
1^{ère} forme fondamentale I_p , $E(p)$, $F(p)$, $G(p)$
et de leurs dérivées partielles mesurées au point p .

III Formule de Gauss

$$EK = \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2$$

Preuve: En derivant % v , l'équation de $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} &= \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ &+ \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ &+ \frac{\partial e}{\partial v} N + e \frac{\partial N}{\partial v} \end{aligned}$$

au chap III, on a par $\frac{\partial N}{\partial v} = a_{12} \frac{\partial x}{\partial u} + a_{22} \frac{\partial x}{\partial v}$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} &= \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial x}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial x}{\partial v} + g N \right) \\ &+ \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \Gamma_{11}^2 \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial x}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial x}{\partial v} + g N \right) \\ &+ \frac{\partial e}{\partial v} N + e \left(a_{12} \frac{\partial x}{\partial u} + a_{22} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e a_{12} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \\ &+ \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} \right) \frac{\partial x}{\partial v} \\ &+ \left(\Gamma_{11}^1 g + \Gamma_{11}^2 g + \frac{\partial e}{\partial v} \right) N \end{aligned}$$

Le même, en dérivant par rapport à u , l'équation donne $\frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v \partial u} &= \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ &+ \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ &+ \frac{\partial \beta}{\partial u} N + \beta \frac{\partial N}{\partial u} \end{aligned}$$

au chap III, on a pose $\frac{\partial N}{\partial u} = a_{11} \frac{\partial x}{\partial u} + a_{21} \frac{\partial x}{\partial v}$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v \partial u} &= \left(\frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + \beta a_{11} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \\ &+ \left(\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + \beta a_{21} \right) \frac{\partial x}{\partial v} \\ &+ \left(\Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 \beta + \frac{\partial \beta}{\partial u} \right) N \end{aligned}$$

En regardant le coefficient de $\frac{\partial x}{\partial v}$ dans l'égalité

$$\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} = \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v \partial u}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \\ = \beta a_{21} - e a_{22} \end{aligned}$$

d'après chap III eqs de Wangautern

$$= \beta \frac{eF - \beta E}{EG - F^2} - e \frac{\beta F - gE}{EG - F^2} = E \frac{eg - \beta^2}{EG - F^2}$$

Remarque : • En regardant le coefficient de $\frac{\partial x}{\partial u}$

on obtient une autre forme de la formule de Gauss

$$FK = - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1$$

• En regardant le coefficient de N

on obtient une des deux équations de Mainardi - Codazzi

$$\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial b}{\partial u} = e \Gamma_{12}^1 + b \left(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \right) - g \Gamma_{11}^2$$

$$\bullet E = \left\| \frac{\partial x}{\partial u} \right\|^2 \neq 0$$

donc d'après la formule de Gauss

la courbure de Gauss K au point p s'exprime en fonction des symboles de Christoffel au point p , $\Gamma_{ij}^k(p)$ et de deux autres données au point p , et de $E(p)$.

fin cours Lundi 18 Avril 2011
Mardi 3 Avril 2012

IV THEOREMA EGREGIUM (Gauss)

La courbure de Gauss en un point p d'une surface, $K(p)$ est invariante par isométrie locale :

Soit $\varphi: S \longrightarrow \bar{S}$ une isométrie locale à p

$$\text{alors } K(p) = \bar{K}(\varphi(p))$$

Preuve: φ est une isométrie locale à p

donc il existe un ouvert V' de S contenant p

$$\xrightarrow{\quad \quad \quad} \bar{V}' \xrightarrow{\quad \quad \quad} \bar{S} \xrightarrow{\quad \quad \quad} \varphi(p)$$

tél que $\varphi|_{V'}: V' \longrightarrow \bar{V}'$ isométrie

Soit $X: U \xrightarrow{\cong} V \subset V'$ un système de

coordonnées de S sur un ouvert V contenant p inclus dans V'

Posons $\bar{V} = \varphi(V)$. D'après Proposition

$\bar{X} = \varphi \circ X: U \xrightarrow{\cong} \bar{V}$ est un système de

coordonnées de $\bar{S}$ sur l'ouvert $\bar{V}$ de $\bar{S}$ contenant $\varphi(p)$

et $\forall (u, v) \in U$

$$E(u, v) = \bar{E}(u, v),$$

$$F(u, v) = \bar{F}(u, v)$$

$$G(u, v) = \bar{G}(u, v)$$

$$\text{donc } \forall (u, v) \in U, \quad \Gamma_{ij}^k(u, v) = \bar{\Gamma}_{ij}^k(u, v)$$

$$\text{donc } \forall (u, v) \in U \quad K(u, v) = \bar{K}(u, v) \quad \square$$

Exemple 1 Do Carmo p. 93

Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$
passant par $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$w_1 = (a_1, a_2, a_3) \quad w_2 = (b_1, b_2, b_3) \quad w_1, w_2 \text{ base de } P$$

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto P_0 + u w_1 + v w_2$$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = w_1 \quad \frac{\partial X}{\partial v} = w_2$$

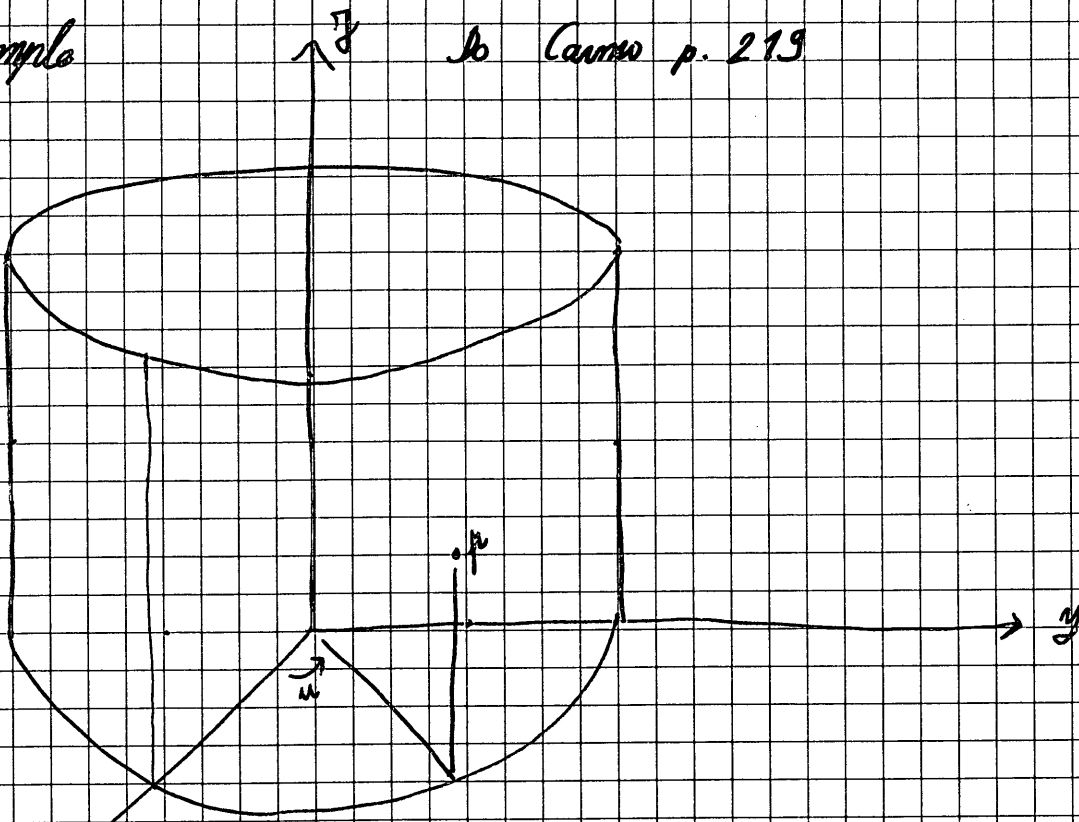
Supposons que w_1, w_2 forment une base orthonormée

$$\text{alors } E = 1 \quad F = 0 \quad G = 1$$

$K = 0$ en tout point du plan Do Carmo p. 137

Exemple

de Courbes p. 219



$$\bar{X}:]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \bar{E} = \sin^2 u + \cos^2 u = 1 \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = 1$$

donc $\varphi = \chi \circ \bar{\chi}^{-1} : \bar{\chi}([0, 2\pi[\times \mathbb{R}) \xrightarrow{\bar{\chi}^{-1}}]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$

$\downarrow \times$
 $\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$

est une isométrie de $\bar{\chi}([0, 2\pi[\times \mathbb{R})$ vers $\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$
donc est une isométrie locale du cylindre vers le plan
pour tout $\mu \in \bar{\chi}([0, 2\pi[\times \mathbb{R}) =$ cylindre privé de la droite
rouge

En remplaçant $]0, 2\pi[$ par $]-\pi, \pi[$ on obtient une
isométrie locale du cylindre vers le plan pour tout point μ
du cylindre
donc d'après le Théorème egregium de Gauss

$\bar{K} = 0$ en tout point du cylindre

$\bar{H} = \frac{1}{2}$ $H = 0$ donc pas de théorème egregium
pour la courbure moyenne

fin cours Vendredi 22 Avril 2011