

Le théorème de Gauss Égrogium

I Isométries

Soient S et $\bar{S}$ deux surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$

def Un difféomorphisme $\varphi: S \longrightarrow \bar{S}$ est une isométrie si pour tout $p \in S$,

$$d\varphi_p: T_p S \longrightarrow T_{\varphi(p)} \bar{S}$$

est une isométrie

c à d $d\varphi_p$ préserve le produit scalaire

$$\forall w_1, w_2 \quad \langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$$

$\Leftrightarrow d\varphi_p$ préserve la première forme fondamentale

$$\forall w \in T_p S \quad I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

Rappel Soit V un ouvert de S

alors V est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$

definition Soit $\varphi: S \longrightarrow \bar{S}$ une fonction. Soit $p \in S$.

φ est une isométrie locale à p

si il existe un ouvert V de S contenant p

$$\bar{V} \subset \bar{S} \quad \varphi(V)$$

tel que $\varphi|_V: V \longrightarrow \bar{V}$ soit une isométrie

$$\varphi(V) \subset \bar{V}$$

Proposition

Soient S et $\bar{S}$ deux surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$

Soit V (respectivement $\bar{V}$) un ouvert de S (respectivement $\bar{S}$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$

$$\text{Soit } X: U \xrightarrow{\cong} V \subset S$$

$$(u, v) \longmapsto X(u, v)$$

un système de coordonnées sur V , de S

Soit $\varphi: V \longrightarrow \bar{V}$ une application

Posons $\bar{X} := \varphi \circ X: U \longrightarrow \bar{V}$

φ est un difféomorphisme (orienté)

ou $\bar{X}: U \longrightarrow \bar{V}$ est un système de coordonnées de $\bar{S}$
sur $\bar{V}$

et $\forall (u, v) \in U$

$$E(u, v) = \bar{E}(u, v)$$

$$F(u, v) = \bar{F}(u, v)$$

$$G(u, v) = \bar{G}(u, v)$$

Preuve : $\Rightarrow$

Tout ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est une surface. Exo 4 Serie 1

$X : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme entre surfaces

$\bar{X} : U \xrightarrow{X} V \xrightarrow{\varphi} \bar{V}$ composé de difféomorphismes est un difféomorphisme

donc $\bar{X}$ est un système de coordonnées

1^{ère} PREUVE UTILISANT DES RESULTATS SUR LES APPLICATIONS DIFFERENTIABLES

Pruve: " $\Rightarrow$ " Soit $\varphi: V \longrightarrow V$ une isométrie

Comme φ est une homéomorphisme

$\bar{X} := U \xrightarrow{X} V \xrightarrow{\varphi} \bar{V}$ composée d'homéomorphismes est un homéomorphisme

$\varphi: V \longrightarrow \bar{V} \subset \mathbb{R}^3$ est de classe C^r

donc par définition

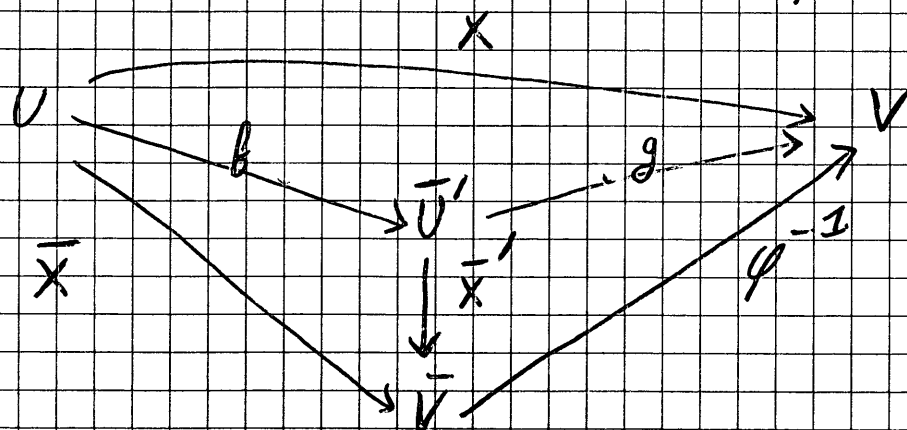
la composée $\bar{X} = \varphi \circ X: U \xrightarrow{X} V \xrightarrow{\varphi} \bar{V} \subset \mathbb{R}^3$ est de classe C^r

$\forall (u, v) \in U$ la surface paramétrisée X est régulière en $X(u, v)$

c.à.d. $dX_{(u,v)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est injectif

$$X = \varphi^{-1} \circ \bar{X}$$

Soit $\bar{X}': \bar{U}' \longrightarrow \bar{V}$ un système de coordonnées ou un voisinage ouvert de $X(u, v)$



Comme φ^{-1} de classe C^r , g est de classe C^r

d'après le lemme fondamentale, f est de classe C^r

Comme $dX_{(u,v)} = dg \circ df$ injectif, df injectif

donc comme $d\bar{X}'$ injectif, $d\bar{X} = d\bar{X}' \circ df$ est injectif

Proposition 1: Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$

$$\text{Soit } X: U \longrightarrow S$$

$$(u, v) \longmapsto X(u, v)$$

un système de coordonnées sur un ouvert de S

$$\text{Soit } \bar{X}: U \longrightarrow \bar{S}$$

un système de coordonnées sur un ouvert de $\bar{S}$

Si $\forall (u, v) \in U$,

$$E(X(u, v)) = \bar{E}(\bar{X}(u, v))$$

$$F(X(u, v)) = \bar{F}(\bar{X}(u, v))$$

$$G(X(u, v)) = \bar{G}(\bar{X}(u, v))$$

Alors l'homéomorphisme

$$\varphi := \bar{X} \circ X^{-1}: X(U) \longrightarrow \bar{X}(U)$$

est une isométrie

Preuve. $\bar{X} \circ X^{-1}: X(U) \longrightarrow \bar{X}(U)$ est de classe C^r

car

la composée

$$U \xrightarrow{X} X(U) \xrightarrow{X^{-1}} U \xrightarrow{\bar{X}} \bar{X}(U) \subset \mathbb{R}^3$$

coïncide avec $\bar{X}$ qui est de classe C^r

• De même, par symétrie $X \circ \bar{X}^{-1}: \bar{X}(U) \longrightarrow X(U)$

est de classe C^r

donc φ est un difféomorphisme de classe C^r

Soit $p \in X(U)$
 Soit $w \in T_p S$

(70)

on a vu que $w = \frac{d(x \circ \alpha)}{dt}(0)$

où $\alpha:]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow U$ courbe plane de classe C^2
 $t \longmapsto (u(t), v(t))$

$$w = \frac{\partial x}{\partial u}(p) u'(0) + \frac{\partial x}{\partial v}(p) v'(0)$$

$$\begin{aligned} d\varphi_p(w) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d(\varphi \circ x \circ \alpha)}{dt}(0) = \frac{d(\bar{x} \circ x_0^2 \circ x \circ \alpha)}{dt}(0) \\ &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(\varphi(p)) u'(0) + \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(\varphi(p)) v'(0) \end{aligned}$$

$$I_p(w) = E(p) u'(0)^2 + 2F(p) u'(0) v'(0) + G(p) v'(0)^2$$

$$I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) = \bar{E}(\varphi(p)) u'(0)^2 + 2\bar{F}(\varphi(p)) u'(0) v'(0) + \bar{G}(\varphi(p)) v'(0)^2$$

qui sont égales par hypothèse

□

fin (corr) Lundi 2 Avril 2012