

VI Exemples

(51)

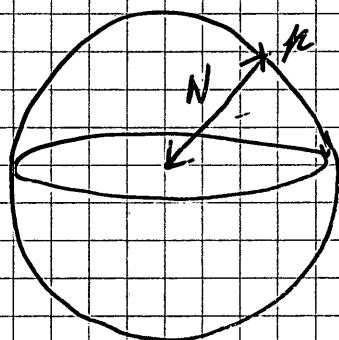
Exemples a) la sphère de Carno p. 137

Soit S^2 la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

S^2 est une surface régulière qui admet pour plan tangent $T_p S^2$ en $p = (x, y, z)$ le plan de vecteur normal

$$\vec{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$



$$\text{donc } \bar{N}: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto \bar{N}(x, y, z) = (x, y, z)$$

$$N: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto N(x, y, z) = -(x, y, z)$$

sont deux orientations de la sphère (extérieure, intérieure)

Orientons la sphère avec l'application de Gauss

$$N: S^2 \longrightarrow S^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto N(x, y, z) = -(x, y, z)$$

Calculons $dN_p: T_p(S^2) \longrightarrow T_p(S^2)$ pour tout $p \in S^2$.

Soit $\vec{v} \in T_p(S^2)$ donc $\vec{v} = \frac{d\alpha}{dt}(0)$ où

$$\alpha:]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow S^2 \text{ courbe paramétrée telle que } \alpha(0) = p \\ t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$$

$$\text{Notons } \alpha:]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow S^2$$

$$t \longmapsto N(t) = (-x(t), -y(t), -z(t)).$$

donc $\frac{dN}{dt}(0) = -\vec{v}$

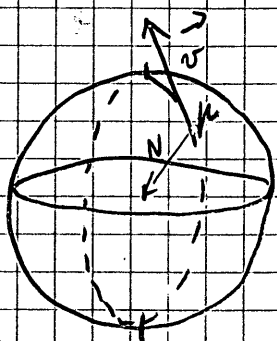
donc $dN_p(\vec{v}) = -\vec{v}$

Do Carrou Exemple 7 p. 143

donc $\Pi_p(\vec{v}) = -dN_p(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$

$k_1 = k_2 = 1$ courbures normales

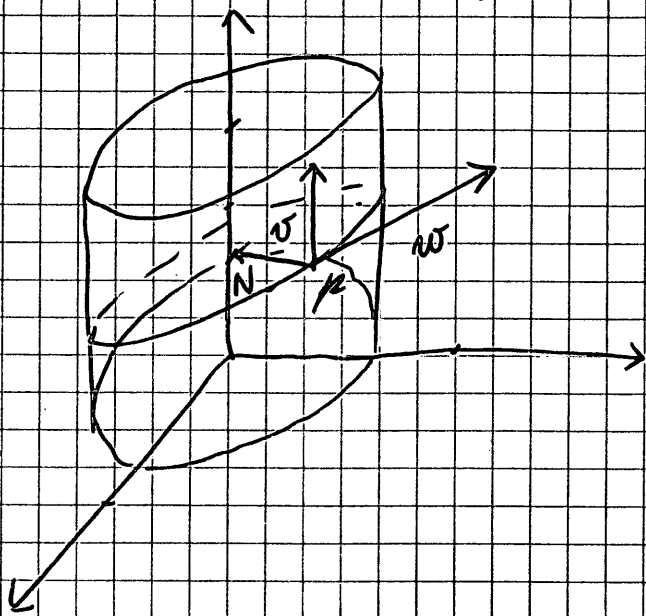
Geométriquement les sections normales sont des cercles de rayon 1
donc toutes les courbures normales
sont de valeurs absolues 1.



Tous les points sont elliptiques et
ombiliques

B) le cylindre Do Carrou p. 138

Soit S la surface d'équation $x^2 + y^2 = 1$



S surface régulière qui admet pour
plan tangent le plan de
vecteur normal

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

base de $T_p S$

$$\bar{N}(x, y, z) = (x, y, 0)$$

$$N(x, y, z) = -(x, y, 0)$$

$$\text{Soit } \alpha \in]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$$

$$N(t) = (-x(t), -y(t), 0)$$

$$N'(0) = (-x'(0), -y'(0), 0)$$

$$\text{donc } dN_{\mu}(x'(0), y'(0), z'(0)) = (-x'(0), -y'(0), 0)$$

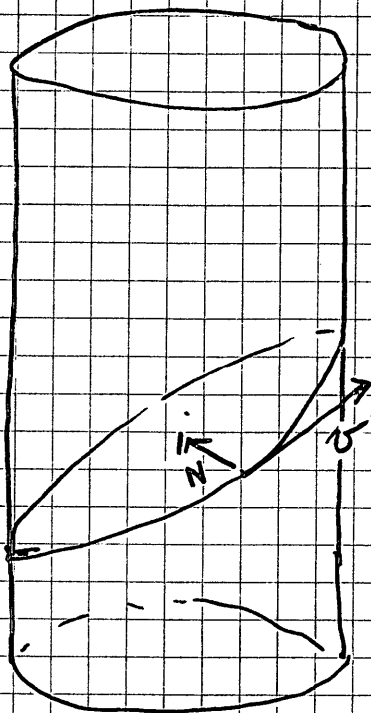
$$dN_{\mu}(\vec{\sigma}) = 0 \quad dN_{\mu}(\vec{w}) = -\vec{w}$$

Do Carmo p. 144

$$K_1 = 1 \quad K_2 = 0 \quad K = 0$$

tous les points du cylindre
sont paraboliques.

Geométriquement, les sections normales sont des ellipses



quand $\vec{v}$ est horizontal,

cercle de rayon 1

quand $\vec{v}$ est vertical

2 droites parallèles à l'axe du cylindre

donc les courbures normales en

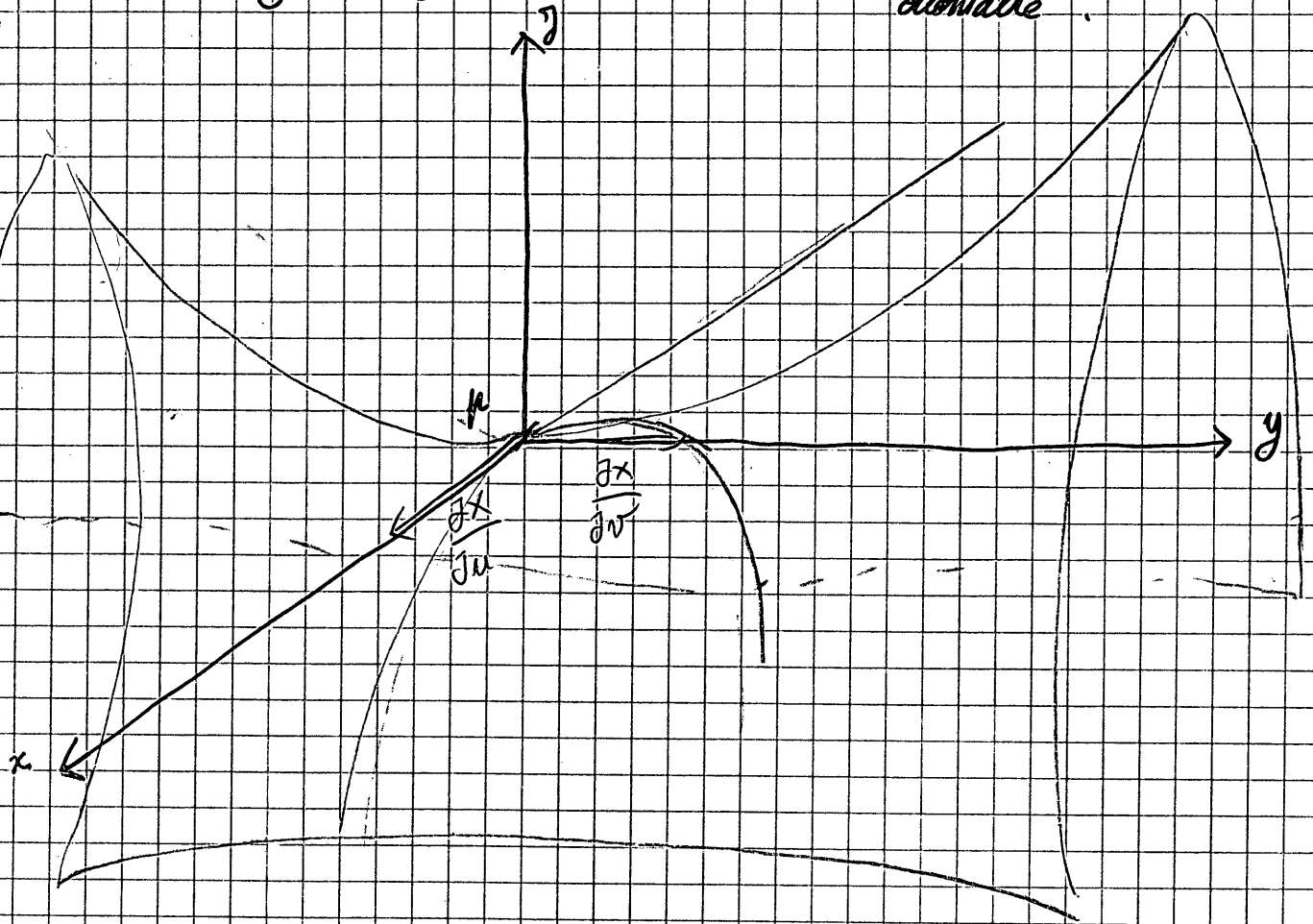
preneurs absolus varient de 1 à 0.

Do Carmo Proposition 2 p. 108

en utilisant grad f , toute surface
définie par $f^{-1}(c)$ est orientable

c) le paraboloides hyperbolique = selle de cheval

$z = y^2 - x^2$ graphe d'une surface régulière orientable !



On considère $p = (0,0,0)$

Considérons la paramétrisation $x(u,v) = u$

$$y(u,v) = v$$

$$z(u,v) = v^2 - u^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Remarque

$$N = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|} = \frac{\begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

on $p = 0$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $dN_p \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right) = \frac{\partial N}{\partial u}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$N = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{-\frac{1}{2} \times 8u}{(4u^2 + 4v^2 + 1)^{3/2}} \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial N}{\partial v} = \frac{-\frac{1}{2} \times 8v}{(4u^2 + 4v^2 + 1)^{3/2}} \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dN_p \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right) = \frac{\partial N}{\partial v}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = 2 \quad R_2 = -2 \quad K = -4 \quad H = 0$$

for cours Mardi 27 Mars 2012

VII Indicatrice de Dupin

def Soit p un point d'une surface orientée S .

L'indicatrice de Dupin en p est l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de $T_p S$ tels que $\Pi_p(\vec{v}) = \pm 1$.

Soient e_1, e_2 une base orthonormée $^{da T_p S}$ tel que

$$dN_p(e_1) = -k_1 e_1$$

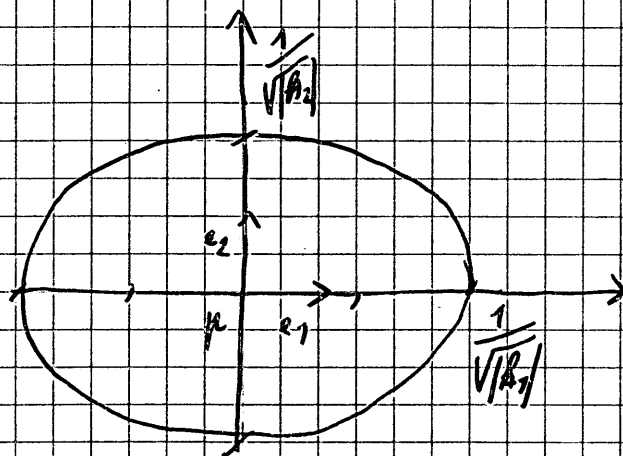
$$dN_p(e_2) = -k_2 e_2$$

$$\Pi_p(x e_1 + y e_2) = k_1 x^2 + k_2 y^2$$

Dans le repère orthonormé $(p, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de $T_p S$, l'indicatrice de Dupin en p a pour équation

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 = \pm 1$$

(1) Si $k_1, k_2 > 0$ $\left(\begin{array}{l} \text{def} \\ \iff p \text{ est elliptique} \end{array} \right)$
c'est une ellipse



(2) Si $k_1, k_2 < 0$ $\left(\begin{array}{l} \text{def} \\ \iff p \text{ est hyperbolique} \end{array} \right)$
c'est la réunion des deux hyperboles

$$\frac{x^2}{\frac{1}{|k_1|}} - \frac{y^2}{\frac{1}{|k_2|}} = 1$$

$$\text{et } \frac{y^2}{\frac{1}{|k_2|}} - \frac{x^2}{\frac{1}{|k_1|}} = 1$$

equation des asymptotes communes à ces deux hyperboles

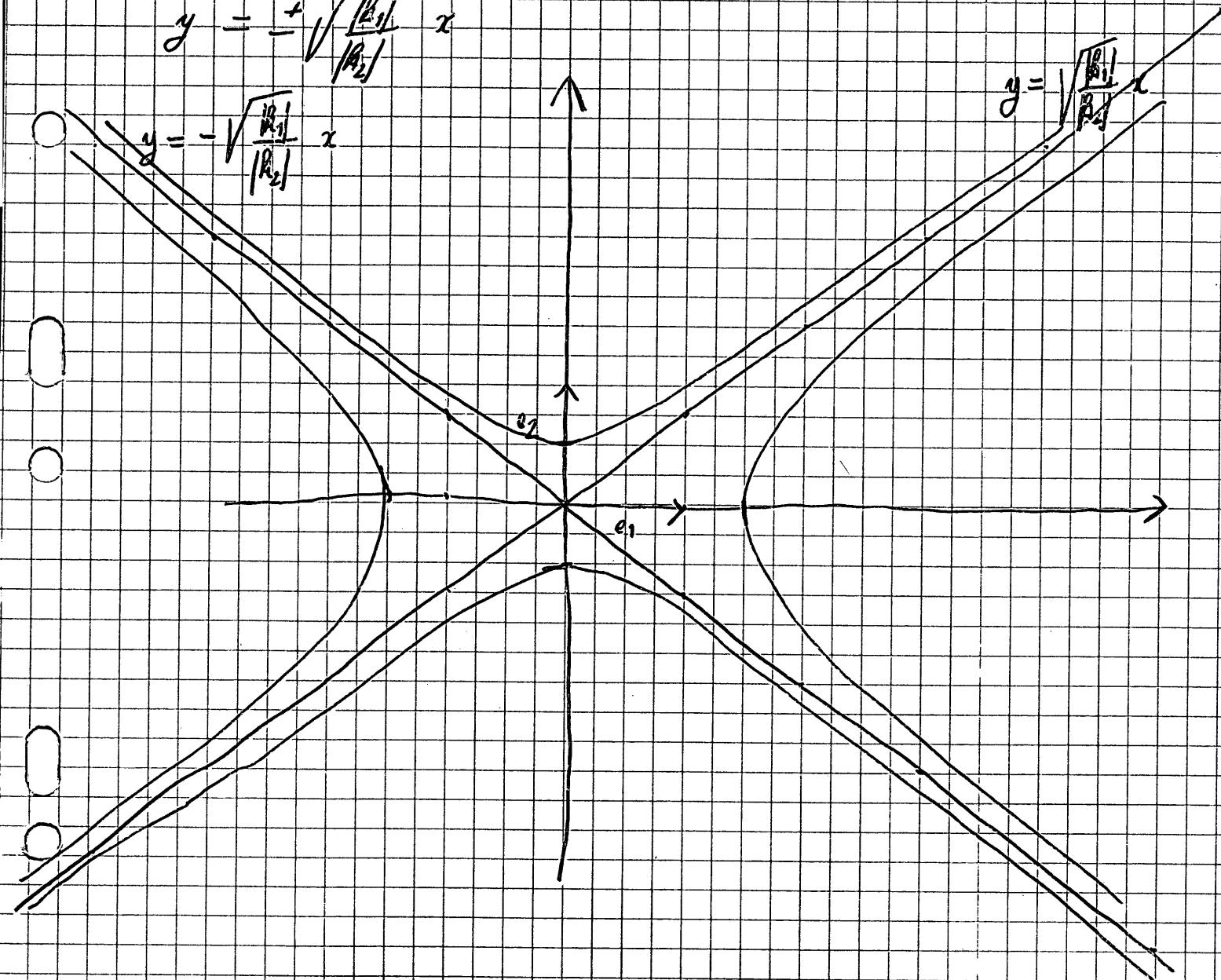
$$\frac{x^2}{\frac{1}{|k_1|}} - \frac{y^2}{\frac{1}{|k_2|}} = 0$$

$$|k_1| x^2 - |k_2| y^2 = (\sqrt{|k_1|} x - \sqrt{|k_2|} y) \times (\sqrt{|k_1|} x + \sqrt{|k_2|} y)$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{|k_1|}{|k_2|}} x$$

$$y = -\sqrt{\frac{|k_1|}{|k_2|}} x$$

$$y = \sqrt{\frac{|k_1|}{|k_2|}} x$$



Soit $\vec{t} = x e_1 + y e_2$ un vecteur unitaire

$$\Pi_p(\vec{t}) = \pm \sqrt{|k_1| x^2 - |k_2| y^2}$$

$\vec{t} \in$ une des droites asymptotesssi $\Pi_p(\vec{t}) = 0$

donc la courbure normale de S dans la direction des droites asymptotes est nulle et dans les autres directions est non nulle

(3) Si $k_1, k_2 = 0$ et $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ ($\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} p$ est parabolique)

cas $k_1 = 0$ $y^2 = \pm \frac{1}{k_2}$ $y = \pm \sqrt{\frac{1}{|k_2|}}$

cas $k_2 = 0$ $x^2 = \pm \frac{1}{k_1}$ $x = \pm \sqrt{\frac{1}{|k_1|}}$

cas $k_1 = 0$

$$\Pi_p(\vec{t}) = k_2 y^2 = 0$$

ou $y = 0$

cas $k_2 = 0$

$$\Pi_p(\vec{t}) = k_1 x^2 = 0$$

ou $x = 0$

Dans les 2 cas, l'indicatrice de Dupin
est la réunion de 2 droites parallèles.

La courbure normale de S est nulle uniquement
dans la direction commune de ces 2 droites.

$$(4) \quad h_1 = h_2 = 0$$

L'indicatrice de Dupin est l'ensemble vide.

fin cours Lundi 11 Avril 2011