

IV Courbure normale d'une courbe située sur une surface

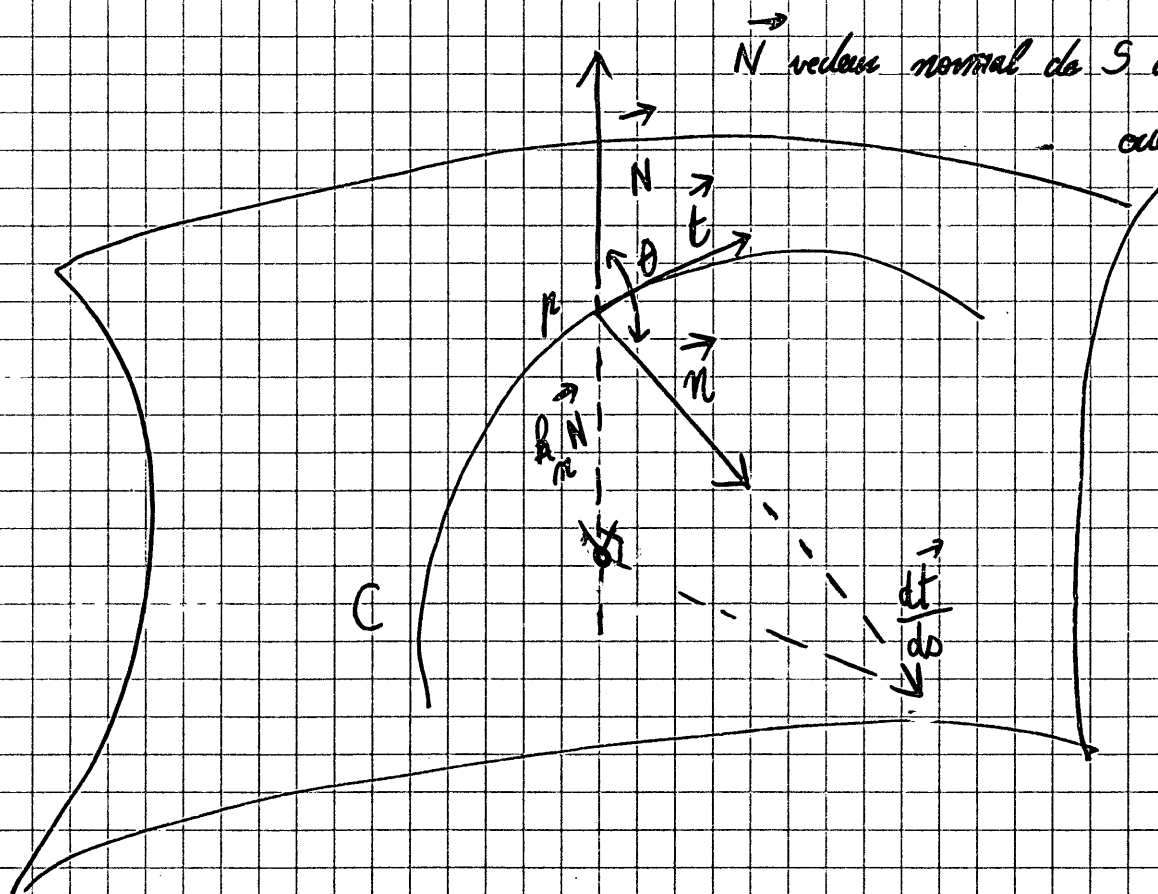
Soit C une courbe paramétrée régulière de classe C^2 située sur la surface régulière orientée S .

Soit s son abscisse curviligne $\vec{t} = \frac{dM}{ds} = \frac{dM/dt}{\|dM/dt\|}$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k \vec{n}$$

$k > 0$ courbure de la courbe car la courbe est birégulière

$\vec{N}$ vecteur normal de S donné par son orientation



Remarque $\vec{t} \in T_p S$, en général $\frac{d\vec{t}}{ds} \notin T_p S$

Definition

Poseons $\cos \theta = \vec{n} \cdot \vec{N}$ $\vec{n}$ vecteur normal de la courbe
surface

Le nombre réel $k_n = k \cos \theta = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{N}$
est appelé courbure normale de la courbe

Remarque k_n ne depend pas de l'orientation de la courbe
mais change de signe si on change l'orientation de la
surface

Preuve k et $\vec{n}$ independant de l'orientation de la courbe
 $\vec{N}$ change en $-\vec{N}$ si on change l'orientation de la
surface

Proposition La seconde forme fondamentale est egale en une
vecteur tangent unitaire d'une courbe trace sur la surface S
a la courbure normale de la courbe

Preuve $\vec{N}(p) \cdot \vec{t}(p) = 0$
donc $\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{t} + \vec{N} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$

$$\Pi_p(\vec{t}) = -dN_p(\vec{t}) \cdot \vec{t}$$

$$\text{Or } dN_p(\vec{t}) = \frac{d\vec{N}}{ds} \text{ donc}$$

$$\Pi_p(\vec{t}) = -\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{t} = \vec{N} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = k_n \quad \square$$

Corollaire Théorème de Meunier

(47)

Toutes les courbes situées sur une surface S admettant en un point donné p , la même droite tangente ont en ce point, les mêmes courbures normales.

Exemple Soit v un vecteur unitaire de $T_p S$

on appelle section normale de S en p le long de v ,
l'intersection de S avec le plan contenant v , $N(p)$
passant par p .

Localement, la section normale de S en p le long de v
est une courbe plane régulière (déf. courbe de dimension 1
dans $\mathbb{R}^2$) prouve L.E. DIHET p. 119-120.
section normale $\hookrightarrow$ plan

$M(s) \in \text{plan}(p, v, N(p))$

$t(s) = \frac{dM}{ds}(s) \in \text{vect}(v, N(p))$ donc $\frac{dM}{ds}(p) = \pm v$

$\frac{dM}{ds}(p) \in T_p S$

$\downarrow$ transverse

$S \subset \mathbb{R}^3$

$\frac{dt}{ds} \in \text{vect}(v, N(p))$

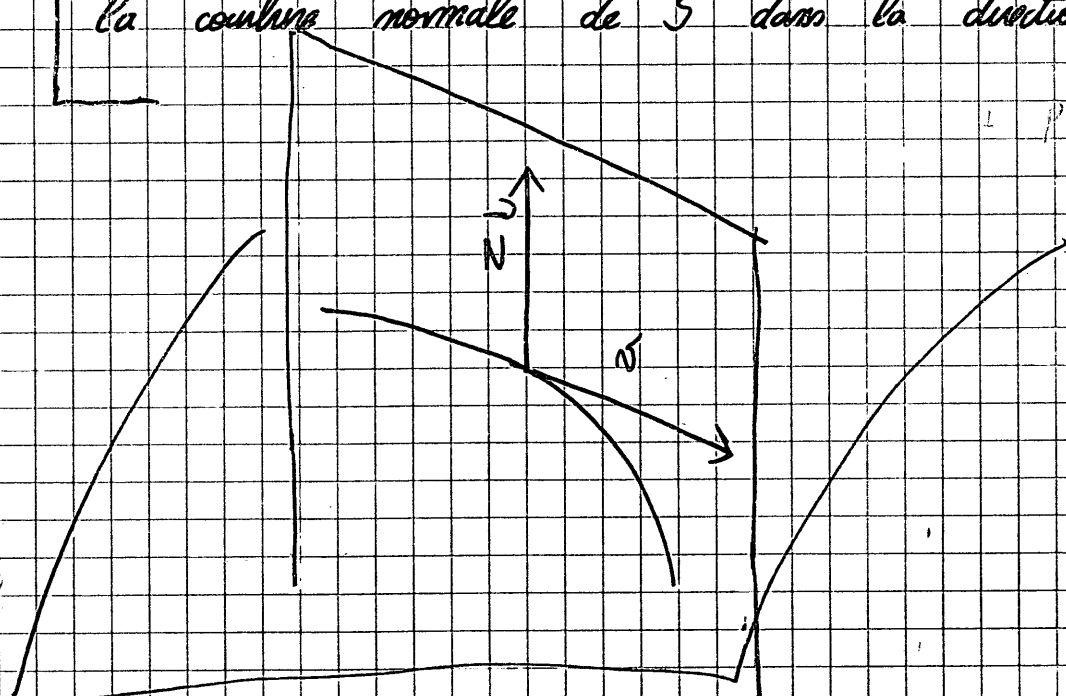
le vecteur normal n de C est $\pm N(p)$

Comme $\frac{dt}{ds}(p)$ normal à $\frac{dM}{ds}(p) = \pm v$

donc $k_n = k \cos 0$ ou $k \cos \pi$ $k = |k_n|$

la section normale

La courbure de est égale à la valeur absolue de la courbure normale de S dans la direction v .



IV Courbures principales d'une surface orientée

(49)

$dN_p : T_p S \longrightarrow T_p S$ est un endomorphisme autoadjoint. Il existe donc une base orthonormée e_1, e_2 de $T_p S$ tq

$$dN_p(e_1) = -k_1 e_1$$
$$dN_p(e_2) = -k_2 e_2$$

Par symétrie, on suppose $k_1 \geq k_2$

$$\begin{aligned} \Pi_p(x e_1 + y e_2) &= -dN_p(x e_1 + y e_2) \cdot (x e_1 + y e_2) \\ &= (x k_1 e_1 + y k_2 e_2) \cdot (x e_1 + y e_2) \\ &= k_1 x^2 + k_2 y^2 \end{aligned}$$

donc courbure normale dans la direction de $e_1 = \Pi_p(e_1) = k_1$

courbure normale dans la direction $e_2 = \Pi_p(e_2) = k_2$

Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire de $T_p S$

$$\vec{v} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 \quad \text{avec} \quad x^2 + y^2 = 1$$

donc courbure normale dans la direction $\vec{v} = \Pi_p(\vec{v}) =$

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 \geq k_2 x^2 + k_2 y^2 = k_2$$

$$\leq k_1 x^2 + k_1 y^2 = k_1$$

définition 1 La courbure normale maximale k_1 et la courbure normale minimale k_2 sont appelées les courbures principales de S en p .

ii) Les directions correspondantes, c à d les directions données par les vecteurs propres $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont appelées directions principales

iii) Une courbe paramétrée régulière tracée sur la surface S dont la tangente en chaque point p est une direction principale en p est appelé ligne de courbure de la surface

iv)

$$K_p = \text{determinant de } dN_p = k_1 k_2$$
$$= \text{courbure totale ou de Gauss}$$

$$H_p = -\frac{1}{2} \text{ trace de } dN_p = \frac{k_1 + k_2}{2} = \text{courbure moyenne}$$

v) Un point p de S est dit elliptique si $K_p > 0$

hyperbolique si $K_p < 0$

parabolique si $K_p = 0$ et $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$

planaire si $k_1 = k_2 = 0$

ombilique si $k_1 = k_2$

for cours Vendredi 8 Avril 2011

for cours Lundi 26 Mars 2012