

La deuxième forme fondamentale

I Orientation d'une surface

Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

Soit $X: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ un système de coordonnées sur un ouvert de S

$$(u, v) \longmapsto X(u, v)$$

alors le composé

$$N: X(U) \xrightarrow{X^{-1}} U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$q \longmapsto (u, v) \longmapsto \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$$

$$N(q) := \frac{\frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

qui est un des 2 vecteurs normaux unitaires au point $X(u, v)$

est une application différentiable sur $X(U)$.

Preuve: $X(U)$ est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$

car $X(U)$ est le support géométrique de la surface paramétrée plongée X

Par définition N est différentiable sur $X(U)$

Donc le composé $N \circ X: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est différentiable sur U .

Le composé $N \circ X$ coïncide avec l'application

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) \\ & & \parallel \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) \parallel \end{array}$$

qui est de classe C^1 sur U si X est de classe C^2 sur U .

definition Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$

On dit que S admet une orientation N

si N est une application différentiable

$$N: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$\eta \longmapsto$ un vecteur normal unitaire

"un champ différentiable sur S de vecteurs normaux unitaires"

S muni d'une orientation N est dit orienté

S est dit orientable si il existe une orientation N sur S .

Propriété Toute surface S couverte par un seul système de coordonnées (par exemple, le graphe $z = f(x, y)$ d'une application f de classe C^2) a une orientation canonique

preuve: faite ci-dessous

Il existe des surfaces non orientables. Par exemple, le ruban de Moebius ouvert.

II l'application de Gauss et sa différentielle

définition De Carmo p. 136

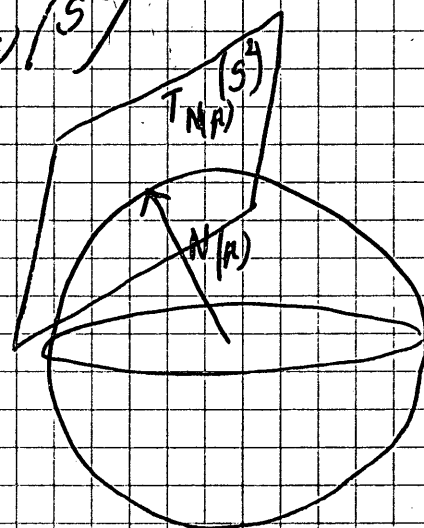
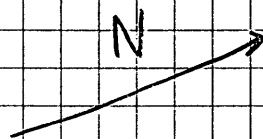
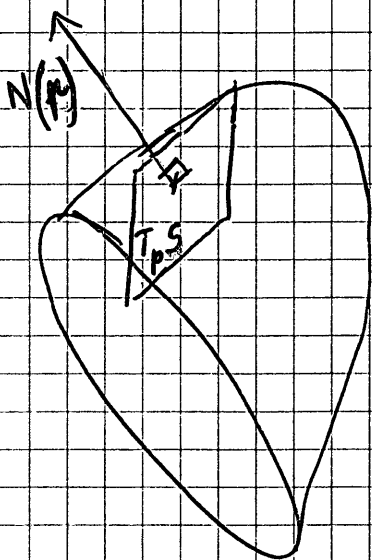
L'orientation $N: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ d'une surface orientée prend ses valeurs dans la sphère unité

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

L'application $N: S \longrightarrow S^2$ ainsi définie est appelée application de Gauss

Sa différentielle est une application linéaire

$$dN_p: T_p S \longrightarrow T_{N(p)}(S^2)$$



$$T_p S \perp N(p)$$

$$N(p) \perp T_{N(p)}(S^2)$$

donc $T_p S$ est parallèle à $T_{N(p)}(S^2)$

donc égalité des plans de $\mathbb{R}^3$ $T_p S = T_{N(p)}(S^2)$

donc dN_p peut être considéré comme étant un endomorphisme de $T_p S$

Proposition 1 De Carmo p. 140

La différentielle $dN_p: T_p S \longrightarrow T_p S$ de l'application de Gauss est un endomorphisme autoadjoint par rapport à la première forme fondamentale I_p .

Soit E un espace euclidien

= un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie
muni d'un produit scalaire

Soit $\varphi: E \longrightarrow E$ une application linéaire

def φ est symétrique ou autoadjoint

$$\text{c.à.d. } \forall \vec{v}, \vec{w} \in E \quad \varphi(\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \varphi(\vec{w})$$

cas où $\dim E = 2$

Soit $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ une base quelconque (pas forcément
orthonormée) de E

Lemme

$$\text{Si } \varphi(\vec{w}_1) \cdot \vec{w}_2 = \vec{w}_1 \cdot \varphi(\vec{w}_2)$$

alors φ est autoadjoint

Preuve $\forall i = 1, 2 \quad \forall j = 1, 2$, on a

$$\varphi(\vec{w}_i) \cdot \vec{w}_j = \vec{w}_i \cdot \varphi(\vec{w}_j)$$

Donc par bilinéarité

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in E \quad \varphi(\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \varphi(\vec{w})$$

Soit $X: U \xrightarrow{(u,v)} S \subset \mathbb{R}^3$ une paramétrisation sur un ouvert de S contenant μ $X(u,v)$

$\frac{\partial X}{\partial u}(\mu), \frac{\partial X}{\partial v}(\mu)$ base de $T_\mu S \subset \mathbb{R}^3$
par définition de la différentielle entre 2 surfaces

$$dN_\mu \left(\frac{\partial X}{\partial u}(\mu) \right) = \frac{\partial N}{\partial u}(\mu) \text{ car } \frac{\partial X}{\partial u} = \text{vecteur tangent de } u \rightarrow X(u,v)$$

$$dN_\mu \left(\frac{\partial X}{\partial v}(\mu) \right) = \frac{\partial N}{\partial v}(\mu)$$

$$N(u,v) \cdot \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) = 0$$

en dérivant par rapport à v , on a donc

$$\frac{\partial N}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) + N(u,v) \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$$

$$N(u,v) \cdot \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) = 0$$

en dérivant par rapport à u ,

$$\frac{\partial N}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + N \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} = 0$$

$$\text{donc } \frac{\partial N}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial N}{\partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial u}$$

$$dN_\mu \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot dN_\mu \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)$$

donc d'après le lemme précédent

dN_μ est auto-adjoint

fin Lundi 4 Avril 2011

fin Mercredi 28 Avril 2010

□

III La 2^{ème} forme fondamentale

Soit E un espace euclidien

A toute endomorphisme (symétrique) φ
est associé une forme bilinéaire (symétrique)

$$B(\vec{v}, \vec{w}) = \varphi(\vec{v}) \cdot \vec{w}$$

preuve : 1) B est linéaire en $\vec{v}$ et $\vec{w}$ clair

$$\begin{aligned} \text{..)} \quad B(\vec{v}, \vec{w}) &= \varphi(\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \varphi(\vec{w}) \\ &= \varphi(\vec{w}) \cdot \vec{v} = B(\vec{w}, \vec{v}) \end{aligned}$$

définition Soit S une surface régulière orientée de $\mathbb{R}^3$. Soit $p \in S$.
La seconde forme fondamentale II_p est la forme quadratique
associée à l'endomorphisme auto-adjoint $-dN_p$:

$$II_p(\vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} -dN_p(\vec{v}) \cdot \vec{v} \text{ pour tout } \vec{v} \in T_p S$$