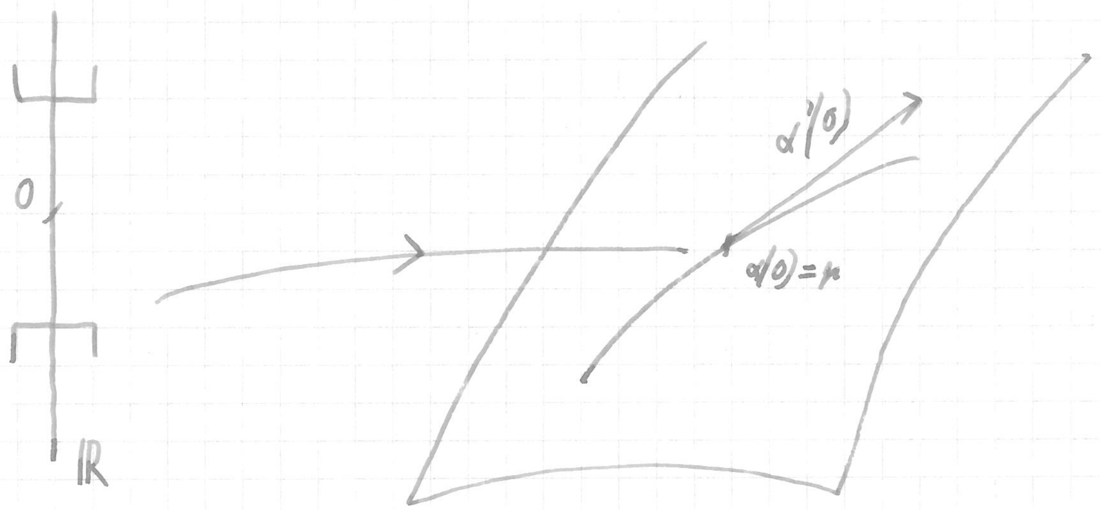
III plan tangent - Différentielle d'une application

Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

Soit $p \in S$. Do Carmo p. 83 Ramis tome V 3.3.2

définition Un vecteur tangent de S en p est le vecteur vitesse $\alpha'(0)$ d'une courbe paramétrée $\alpha :]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^r tel que $\alpha(0) = p$ de support inclus dans S.



Proposition 1 p. 83 Do Carmo

Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Soit $p \in S$.

Soit $X : U \longrightarrow S \cap U' \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée plongée de support $S \cap U'$ où U' est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ contenant p. Alors le plan vectoriel tangent de la surface paramétrée X en p, $\operatorname{Im} \partial X_{X^{-1}(p)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ coïncide

avec l'ensemble des vecteurs tangents de S en p.

Notation : On note par $T_p S$, le plan tangent en p de S.

Preuve :

Soit $\vec{w}$ un vecteur tangent de S en p.

Par définition, il existe une courbe paramétrée de classe C^r
$\alpha\ ]-\varepsilon,+\varepsilon[\longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(0) = p$
et $\alpha'(0) = \vec{w}$. En prenant ε assez petit, on peut supposer que $\alpha(]-\varepsilon,+\varepsilon[) \subset U'$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\cong", "X"'] & S \cap U' \subset \mathbb{R}^3 \\ ]-\varepsilon,+\varepsilon[\arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Soit $\beta = X^{-1} \circ \alpha$. D'après le Lemme, l'application cont β est de classe C^r

$$D\alpha_0 = DX_{X^{-1}(p)} \circ D\beta_0$$

$$\alpha'(0) = D\alpha_0(1) = DX_{X^{-1}(p)}\left(D\beta_0(1)\right) = DX_{X^{-1}(p)}\left(\beta'(0)\right)$$

$$\in \operatorname{Im} DX_{X^{-1}(p)}$$

Réciproquement

Soit $\vec{w} \in \operatorname{Im} DX_{X^{-1}(p)}$. Alors il existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

tq $\vec{w} = DX_{X^{-1}(p)}(\vec{v})$

Soit $\beta :]-\varepsilon,+\varepsilon[\longrightarrow U$ courbe paramétrée plane

$$t \longmapsto t v + X^{-1}(p)$$

alors $\beta'(0) = \vec{v}$ Soit $\alpha = X \circ \beta$

fin cours Mardi 13 Mars 2012

$$\alpha'(0) = DX_{X^{-1}(p)}\left(\beta'(0)\right) = DX_{X^{-1}(p)}(\vec{v}) = \vec{w} \qquad \square$$

La différentielle d'une application

Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Soit $p \in S$.

Soit $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^r près de p

On va définir une application linéaire

$$df_p : T_pS \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\vec{w} \longmapsto df_p \cdot \vec{w} = \begin{array}{l}\text{dérivée de } f \text{ le}\\ \text{long de } \vec{w}\end{array}$$

Par définition, $\vec{w}$ est un vecteur tangent de S

C'est à dire par définition, il existe

$\alpha :]-\varepsilon, +\varepsilon[\xrightarrow[C^r]{} S \subset \mathbb{R}^3$ tq $\alpha(0) = p$ et $\alpha'(0) = \vec{w}$

α de classe C^r

On appelle dérivée de f, le long de $\vec{w}$, $(f \circ \alpha)'(0)$

la dérivée en 0 du composée $f \circ \alpha$

$$]-\varepsilon, +\varepsilon[\xrightarrow{\alpha} S \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$df_p \cdot \vec{w} = df_p \cdot \frac{d\alpha}{dt}(0) \overset{def}{:=} \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0)$$

Mentionons que $f \circ \alpha$ est dérivable en 0, de classe C^r sur $]-\varepsilon', +\varepsilon[$

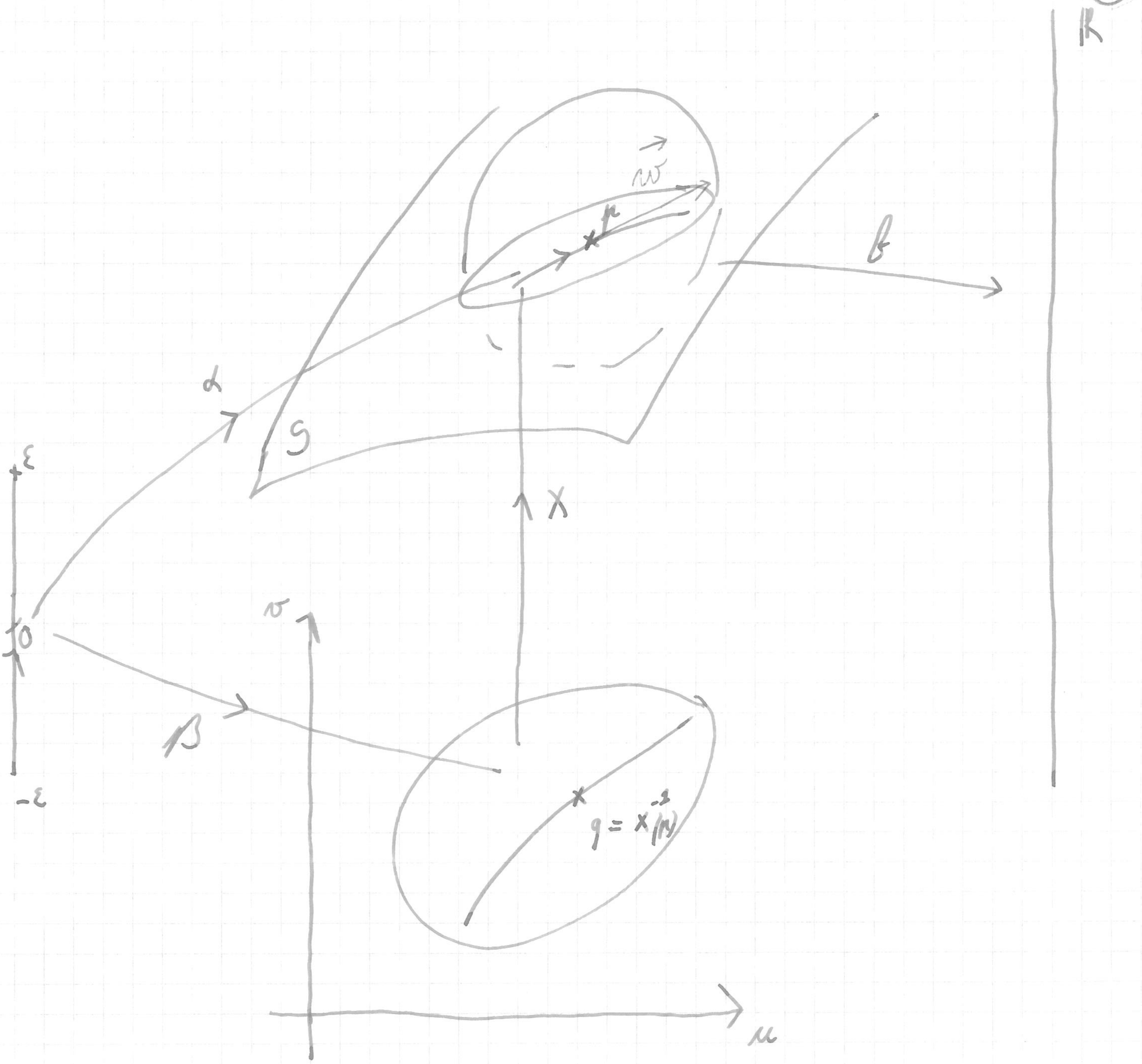
Soit $X : U \longrightarrow S \cap V' \subset \mathbb{R}$ un système de coordonnées de S sur $S \cap V'$ où V' est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ contenant p.

Soit $\beta = X^{-1} \circ \alpha$.

D'après le Lemme, β est de classe C^r (déjà vu)

Comme f est de classe C^r près de p, par définition $f \circ X$ est de classe C^r près de $q := X^{-1}(p)$

donc $\underbrace{(f \circ X) \circ \beta}_{f \circ \alpha}$ est dérivable en 0



Proposition Proposition 2 Do Carmo p 84

La dérivée de f le long de $\vec{w}$ est indépendante du choix de α. L'application

$$\begin{aligned} df_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{w} &\longmapsto df_p \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

est linéaire

Preuve : On continue avec les notations précédentes.

Soit $\beta(t) = (u(t), v(t))$

$$\vec{w} = \frac{d\alpha}{dt}(0) = \frac{\partial X}{\partial u}(q)\,\frac{du}{dt}(0) + \frac{\partial X}{\partial v}(q)\,\frac{dv}{dt}(0)$$

$$df_p \cdot \vec{w} = \frac{d(f\circ\alpha)}{dt}(0) = \frac{\partial f\circ X}{\partial u}(q)\,\frac{du}{dt}(0) + \frac{\partial f\circ X}{\partial v}(q)\,\frac{dv}{dt}(0)$$

donc $\vec{w}$ admet $\left(\frac{du}{dt}(0), \frac{dv}{dt}(0)\right)$ pour coordonnées relativement à la base $\left(\frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q)\right)$ de $T_p S$

$df_p \cdot \vec{w}$ ne depends que de ces coordonnees donc est independant du choix de α

$$df_p \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial u}(q)\, u'(0) + \frac{\partial X}{\partial v}(q)\, v'(0)\right)$$

$$= \frac{\partial f\circ X}{\partial u}(q)\, u'(0) + \frac{\partial f\circ X}{\partial v}(q)\, v'(0)$$

donc df_p est lineaire $\square$

IV Première forme fondamentale

Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

Soit $p \in S$.

Considérons son plan tangent en p $T_p S \subset \mathbb{R}^3$

def Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ définit par restriction un produit scalaire sur $T_p S$ appelé première forme fondamentale notée $\langle \, , \rangle_p$

Preuve $\langle \, , \rangle_p \; T_p S \times T_p S \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\vec{w_1}, \vec{w_2}) \longmapsto \vec{w_1} \cdot \vec{w_2}$ est bilinéaire symétrique, défini positif $\square$

Soit $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un système de coordonnées

$(u,v) \longmapsto \begin{matrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{matrix}$

sur un voisinage ouvert de p

$\left(\dfrac{\partial X}{\partial u}(p), \dfrac{\partial X}{\partial v}(p)\right)$ est une base de $T_p S$

Si $\vec{w_1} = a_1 \dfrac{\partial X}{\partial u}(p) + b_1 \dfrac{\partial X}{\partial v}(p)$

et $\vec{w_2} = a_2 \dfrac{\partial X}{\partial u}(p) + b_1 \dfrac{\partial X}{\partial v}(p)$

alors $\vec{w_1} \cdot \vec{w_2} = a_1 a_2 \left\| \dfrac{\partial X}{\partial u}(p) \right\|^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \dfrac{\partial X}{\partial u}(p) \cdot \dfrac{\partial X}{\partial v}(p)$

$+ b_1 b_2 \left\| \dfrac{\partial X}{\partial v}(p) \right\|^2$

Propriété Soit $\vec{w} = a \dfrac{\partial X}{\partial u}(p) + b \dfrac{\partial X}{\partial v}(p) \in T_p S$.

La forme quadratique associée I_p vérifie

$I_p(\vec{w}) = a^2 E(p) + 2\, ab\, F(p) + b^2 G(p)$

avec $E(p) = \left\| \dfrac{\partial X}{\partial u}(p) \right\|^2$, $F(p) = \dfrac{\partial X}{\partial u}(p) \cdot \dfrac{\partial X}{\partial v}(p)$, $G(p) = \left\| \dfrac{\partial X}{\partial v}(p) \right\|^2$

Calcul de la longueur d'une courbe située sur S

Application : Soit I intervalle ouvert. Soit $a < b \in I$.

Soit $\alpha : I \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe C^1 située sur S

D'après théorème, $\forall t \in I$, $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)} S$

$$\text{longueur de l'arc } \underbrace{\alpha([a,b])}_{s(b)-s(a)} = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} \, dt$$

En particulier, soit $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un système de coordonnées

$$(u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Soit $\beta : I \longrightarrow U$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

Soit $\alpha = X \circ \beta : I \xrightarrow{\beta} U \xrightarrow{X} S$

$$\alpha'(t) = \frac{\partial X}{\partial u}(\alpha(t))\, u'(t) + \frac{\partial X}{\partial v}(\alpha(t))\, v'(t)$$

$$s(b) - s(a) = \int_a^b \sqrt{u'(t)^2 E(\alpha(t)) + 2\, u'(t) v'(t)\, F(\alpha(t)) + v'(t)^2 G(\alpha(t))} \; dt$$

qu'on écrit souvent

$$(ds)^2 = E\,(du)^2 + 2F\,(du)(dv) + G\,(dv)^2$$

Aire d'une région bornée sur une surface régulière

Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$

Soit $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ une paramétrisation = système de coordonnées sur un ouvert de S

$(u, v) \longmapsto X(u, v)$

Soit Q une région bornée de $\mathbb{R}^2$ inclus dans U

définition 2 Do Carmo p. 98

aire de $X(Q) :\overset{def}{=} \iint_Q \left\| \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv$

définition indépendante de la paramétrisation

Preuve : Soit $R = X(Q)$

Soit $X_1 : V \longrightarrow S$ une autre paramétrisation

$(u_1, v_1) \longmapsto X_1(u_1, v_1)$

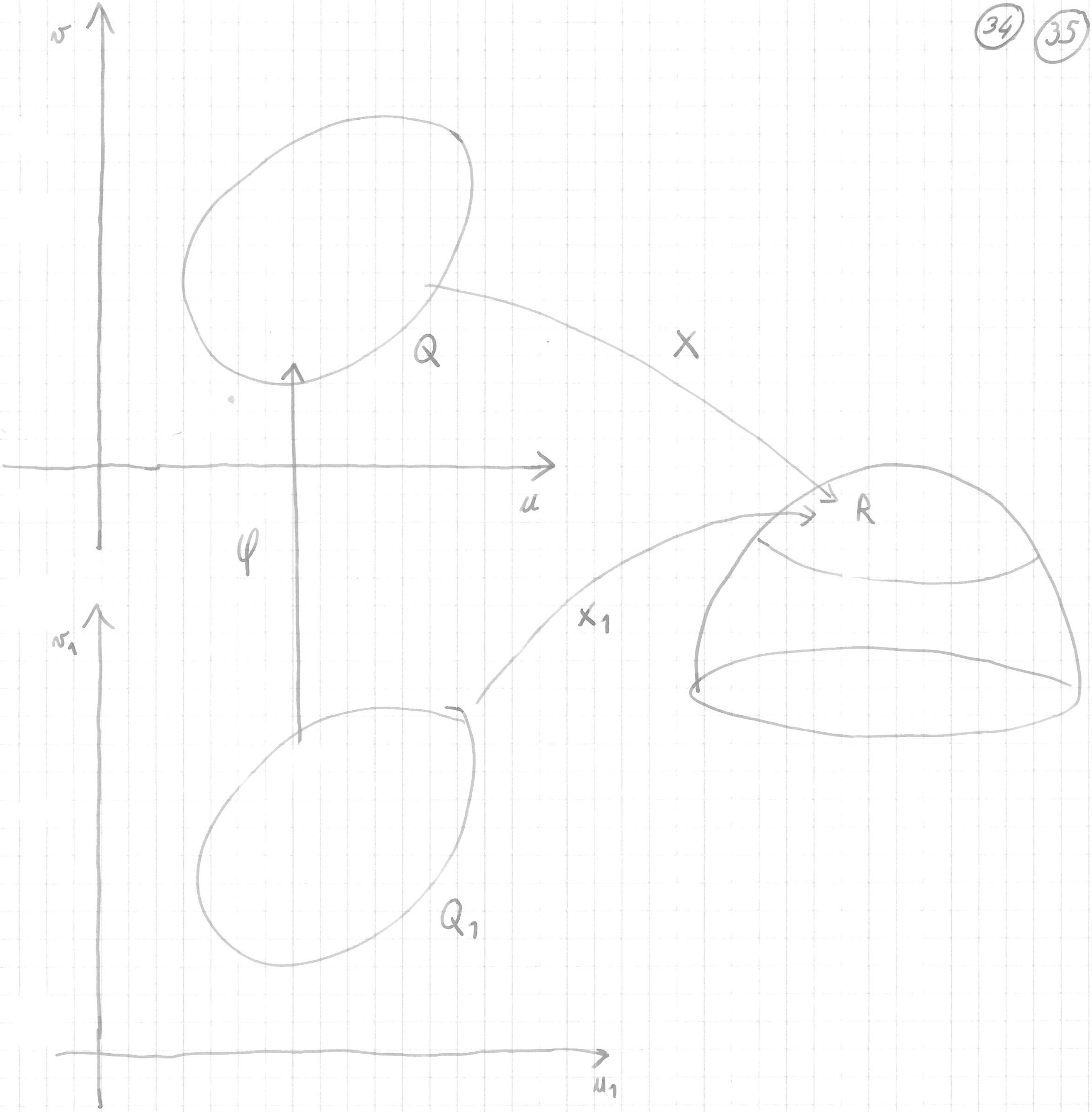
tq $R = X(Q_1)$ où Q_1 région bornée de $\mathbb{R}^2$

D'après Proposition Changement de paramètre

$\varphi = X^{-1} \circ X_1$ est un difféomorphisme sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant Q_1 vers un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant Q

$\varphi : Q_1 \longrightarrow Q$

$(u_1, v_1) \longmapsto (u, v)$



on a vu que

$$\frac{\partial X_1}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X_1}{\partial v_1} = \text{Jacobien de } \varphi \quad \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$$

donc $$\iint_{Q_1} \left\| \frac{\partial X_1}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X_1}{\partial v_1} \right\| \, du_1 \, dv_1$$

$$= \iint_{Q_1} \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| \left| \text{Jacobien de } \varphi \right| \, du_1 \, dv_1$$

d'après formule du changement de variables pour les intégrales doubles

$$= \iint_{Q} \left| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right| \, du \, dv \qquad \square$$

Rappel $\vec{V} \cdot \vec{W} = \|\vec{V}\| \, \|\vec{W}\| \cos(\vec{V}, \vec{W})$

$$\|\vec{V} \wedge \vec{W}\| = \|\vec{V}\| \, \|\vec{W}\| \sin(\vec{V}, \vec{W})$$

donc $\|\vec{V} \wedge \vec{W}\|^2 + (\vec{V} \cdot \vec{W})^2 = \|\vec{V}\|^2 \, \|\vec{W}\|^2$

En prenant $\vec{V} = \dfrac{\partial X}{\partial u}$ $\quad \vec{W} = \dfrac{\partial X}{\partial v}$

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} \right)^2}_{F^2} = \underbrace{\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \right\|^2}_{E} \underbrace{\left\| \frac{\partial X}{\partial v} \right\|^2}_{G}$$

donc $\left\| \dfrac{\partial X}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial v} \right\| = \sqrt{EG - F^2}$

fin Cours Lundi 26 Avril 2010

fin Cours Vendredi 1 Avril 2011

Différentielle d'une application différentiable entre 2 surfaces

Soit S_1 une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

Soit $p \in S_1$. Soit $d \in \mathbb{N}^*$

Soit $f : S_1 \longrightarrow \mathbb{R}^d$

On étend la définition de f est de classe C^r près de p vu dans le cas $d = 1$

Supposons que f est de classe C^r près de p comme dans le cas $d = 1$

On définit sa différentielle en p

$$df_p : T_p S_1 \longrightarrow \mathbb{R}^d \quad \text{linéaire}$$

Soit $\alpha :]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow S_1 \subset \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe C^r tq $\alpha(0) = p$

alors $f \circ \alpha$: est une courbe paramétrée de classe C^r sur $]-\varepsilon', +\varepsilon'[$

Par définition $df_p \cdot (\alpha'(0)) = (f \circ \alpha)'(0)$

Soit S_2 une autre surface régulière de $\mathbb{R}^3$

Supposons que $d = 3$ et que $f(S_1) \subset S_2$.

Alors $f \circ \alpha$ a son support inclus dans S_2.

Donc par définition $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)} S_2$

Conclusion Soit S_1 et S_2 deux surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$.

Soit $p \in S$.

Soit $f : S_1 \longrightarrow S_2 \subset \mathbb{R}^3$ une application de classe C^r près de p

alors $df_p : T_p S_1 \longrightarrow T_{f(p)} S_2$ application linéaire

$$\alpha'(0) \longmapsto (f \circ \alpha)'(0)$$

Milnor-Stasheff p. 8