Surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$

I Définitions - Exemples

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétré

définition α est dite régulière ou immergée si chacun de ses points est régulier $\Leftrightarrow \forall (u_0, v_0) \in U$

$D\alpha_{(u_0,v_0)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est injectif (= de rang maximum)

définition α est dite simple si chacun de ses points est de multiplicité 1 $\Leftrightarrow$ $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une application injective

définition α est dite plongé si α est immergée et α induit un homéomorphisme de U sur son support $\alpha(U)$

notions indépendantes du changement de coordonnées

déf Une partie S de $\mathbb{R}^3$ est une surface régulière ou sous-variété de dimension 2 de classe C^r de $\mathbb{R}^3$ si **localement**, S est une surface paramétré plongée

c à d pour tout point p de S, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^3$ contenant p tel que $S \cap V$ soit le support géométrique d'une surface paramétré plongé $\alpha : U \xrightarrow{\ \equiv\ } S \cap V \subset \mathbb{R}^3$

c à d $\forall p \in S$, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^3$ contenant p et une application $\alpha : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \cap V$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $S \cap V$, de classe C^r telle que

α est un homéomorphisme

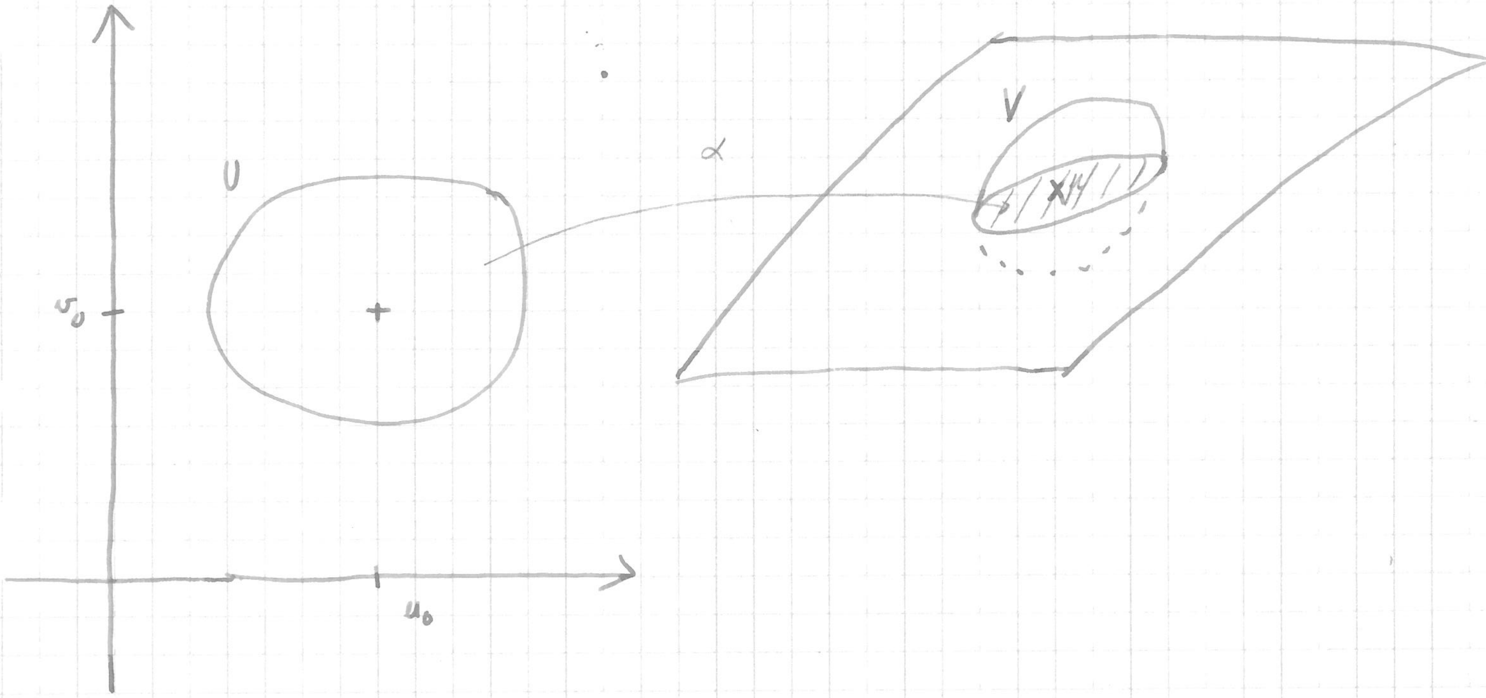
$\forall (u_0, v_0) \in U$, $D\alpha_{(u_0,v_0)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est injectif

Milnor - Stasheff généralise cette définition aux variétés de dim n dans $\mathbb{R}^A$

Ramis tome 5 p. 163-4 Definition II

Lelong - Ferrand - Arnaudies tome 3 Definition VIII. 8.2

Lafontaine 27 Theorem iii) , Do Carmo p. 52 un peu different



def l'application α est une parametrisation ou un systeme de coordonnees sur $S \cap V$

fin Cours Vendredi 18 Mars 2011

Exercice Do Carmo p. 56-7

Montrer que les coordonnées spheriques definissent un systeme de coordonnées sur la sphere de rayon R privee d'un meridien et centrée à l'origine

Proposition 1 Graphe

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^r

$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

alors le graphe de f, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } z = f(x, y)\}$ est (globalement) le support geometique d'une surface parametré plongé donc est une surface regulière de $\mathbb{R}^3$

Preuve: Soit $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u,v) \longmapsto (x = u \ , \ y = v \ , \ f(u,v))$$

on a vu α est une surface paramétré régulière

α est injectif donc est ~~simple~~ ...

$$\alpha^{-1} : S \longrightarrow U$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est la reduction de

la projection $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui est continue.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donc α^{-1} est continue $\square$

Remarque (Do Carmo Proposition 3 p63)

Une partie S de $\mathbb{R}^3$ est une surface regulière

$\Longleftrightarrow$ localement, S est le graphe $z = f(x,y)$

ou $x = g(y,z)$ ou $y = h(x,z)$ d'une application

f de classe C^2.

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(0) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "f"] \\ \{0\} \arrow[r, hook] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

transverse

Proposition 2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2.

Soit $S = f^{-1}(0) = \{ (x,y,z) \in \Omega \ tq \ f(x,y,z) = 0 \}$

Si pour tout $p \in S$, $df_p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est surjective (= de rang maximum)

alors S est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$

Plus précisément pour tout $p \in S$, sur un voisinage de p S est une surface paramétré plongé qui admet pour plan tangent en p, le plan de direction, $\operatorname{Ker} df_p$ (qui est bien de dim 2 car df_p surjectif), c'à d'équation $\overrightarrow{\operatorname{grad}_p f} \cdot \overrightarrow{pM} = 0$

Preuve:
Soit $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$

cal dif 2 Delabaere

$$df_p \cdot (h, k, l) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\, k + \frac{\partial f}{\partial z}(p)\, l$$

est une application linéaire non nulle

Quitte à permuter les variables, je peux supposer que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

D'après le théorème des fonctions implicites,

il existe un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$ et un voisinage ouvert V de z_0 dans $\mathbb{R}$ telle que

– $U \times V \subset \Omega$

– $\forall (x, y) \in U$ l'équation $f(x, y, z) = 0$ admet une unique solution z dans V

Désignons par $g(x, y)$ cette solution.

– L'application $g : U \longrightarrow V$, $(x, y) \longmapsto g(x, y)$ est de classe C^r

Autrement dit $S \cap (U \times V)$ est le graphe $z = g(x, y)$ de l'application g donc d'après proposition précédente, $S \cap (U \times V)$ est le support géométrique d'une surface paramétrée plongé donc S est une surface régulière.

on a la relation pour tout $(x, y) \in U$

$$f(x, y, g(x, y)) = 0$$

donc en dérivant par rapport à x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\,\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

par rapport à y

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

On a vu que le graphe de g admet comme plan tangent en p, le plan d'équation

$$z - z_0 = \frac{\partial g}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(y - y_0)$$

en multipliant par $\frac{\partial f}{\partial z}$ qui est non nul, cela veut dire

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z - z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial g}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial g}{\partial y}(y - y_0)$$

c à d

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

$$Df_p \cdot \overrightarrow{pM} = \overrightarrow{\text{grad}}_p \cdot \overrightarrow{pM} = 0$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\square$

fin cours Lundi 12 Mars 2012

fin cours Lundi 21 Mars 2011

II Changement de paramètres, applications différentiables

Lemme fondamental

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit $X : U \longrightarrow X(U) \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée plongée

Soit $Y : V \longrightarrow X(U) \subset \mathbb{R}^3$ une application de classe C^r tel que $Y(V) \subset X(U)$

alors $h := X^{-1} \circ Y : V \longrightarrow U$ est de classe C^r

en particulier

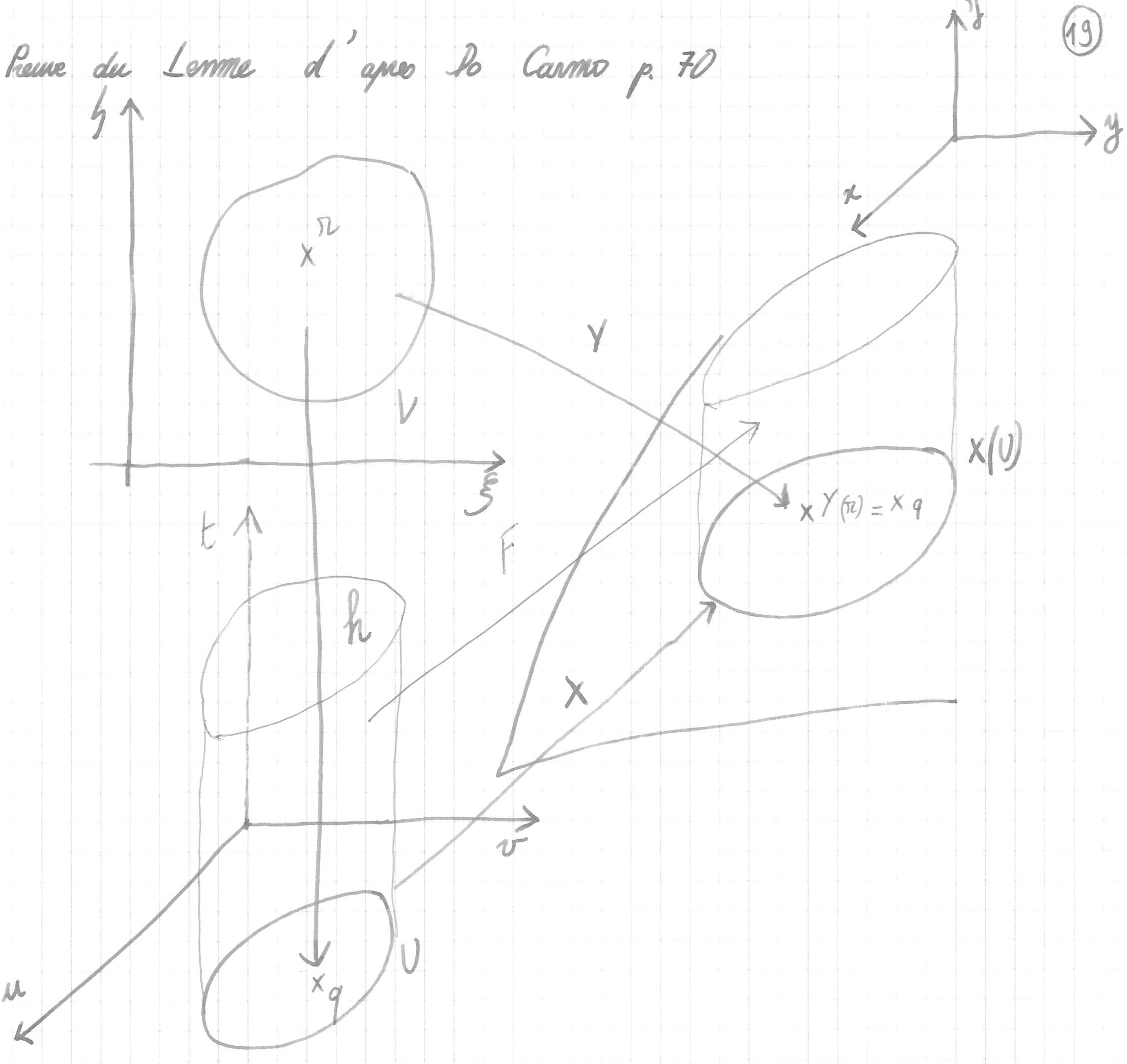
Ramis tome 5

Theorem II 3.1.1 qui donne une autre demonstration

Deux surfaces parametrees plongées de $\mathbb{R}^3$ de même support geometique sont relies par un changement de coordonnées

$$\begin{tikzcd}
y^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2 \arrow[d, dashed, "\exists h \text{ diffeomorphisme de classe } C^r"'] \arrow[dr, "y"] & \\
x^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2 \arrow[r, "x"'] & W \subset \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

Preuve du Lemme d'après Do Carmo p. 70



La preuve des autres livres utilise la définition de sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ (localement on peut redresser des morceaux de V de façon à former des ouverts de $\mathbb{R}^d$)

X homéomorphisme de U sur $X(U)$

Y application continue de V sur $X(U)$

donc $X^{-1} : X(U) \longrightarrow U$ est continue

donc h composé d'applications continues est continu

Il n'est pas possible de conclure par un argument analogue que h est de classe C^n car X^{-1} est défini sur $X(U)$ qui n'est pas forcément un ouvert de $\mathbb{R}^3$

Soit $r \in V$ et soit $q = h(r)$

Soit $X(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ les applications coordonnées de X

Par hypothèse

$$dX_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ injectif } = \text{de rang maximal}$$

c à d

$$\text{mat } dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix} \text{ est de rang } 2$$

donc il y a deux vecteurs lignes indépendants dans cette matrice.
Supposons que ce sont les deux premiers
alors le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

Soit $F : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v, t) \longmapsto \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) + t \end{pmatrix}$$

même dans que Lafontaine 21. Théorème chapitre 1

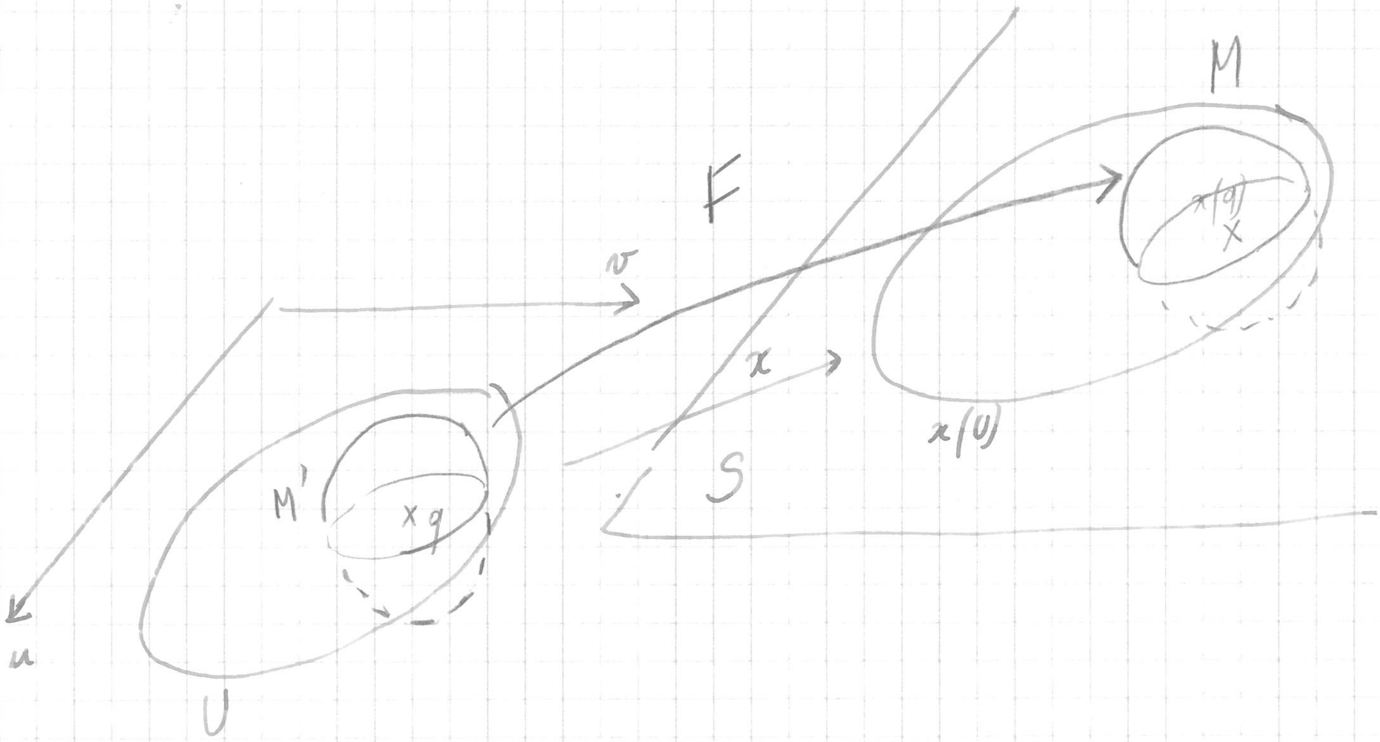
F est de classe C^2

Le Jacobien de F en $(q, 0)$ est
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Donc d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert M de $x(q)$ dans $\mathbb{R}^3$
M' $(q, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$
telle que F induisent un difféomorphisme de M' sur M

A FINIR cf 20 en bleue

telle que F induisent un difféomorphisme de M' sur M



Comme $F/_{U \times \{0\}} = x$,

Sur $x(U) \cap M$, F^{-1} coïncide avec x^{-1}.

Comme $y : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est continu,

$y^{-1}(M)$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant r.

Comme par définition, h est le composé

$$y^{-1}(W) \xrightarrow{y} x(U) \xrightarrow{x^{-1}} \mathbb{R}^2,$$

$h/_{y^{-1}(M) \cap y^{-1}(W)}$ coïncide avec le composé d'applications de classe C^r

$$y^{-1}(M) \cap y^{-1}(W) \xrightarrow{y} M \xrightarrow{F^{-1}} \mathbb{R}^3$$

donc pour tout $r \in y^{-1}(W)$, h est de classe C^r sur le voisinage ouvert $y^{-1}(M) \cap y^{-1}(W)$ de r

donc h est de classe C^r

En échangeant les rôles de $\underline{x}$ et de $\underline{y}$, par symétrie, on montre que h^{-1} est de classe C^r sur $x^{-1}(W)$ $\square$

II Changement de paramètres, applications différentiables

Proposition 1. (Changement de paramètres)

Do Carmo p. 70

Berger-Gostiaux 2.1.9 Cartan Cours de calcul dif p. 253

Lafontaine II. 3 Proposition Milnor-Stasheff, Lemme 1.1

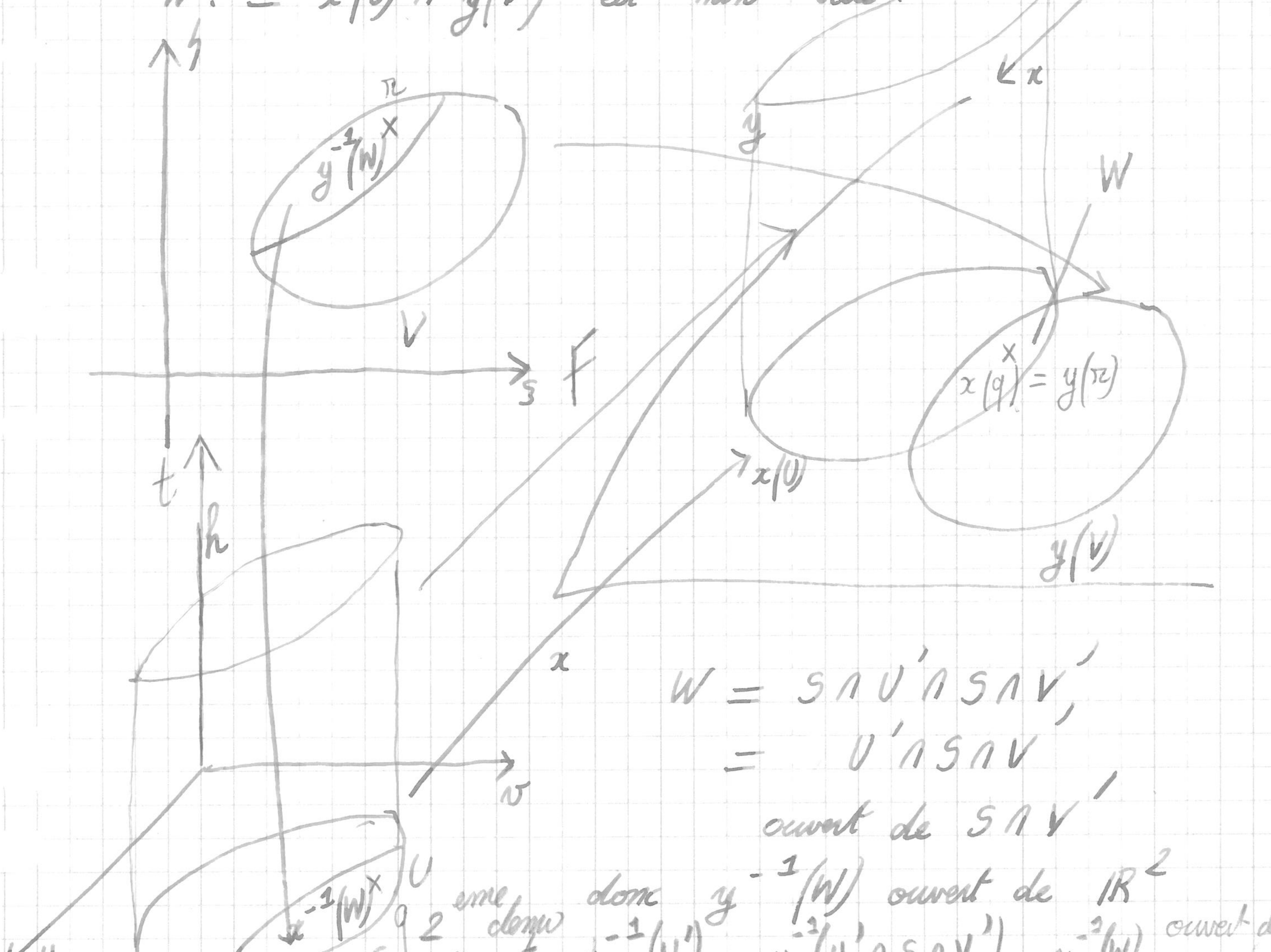
Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

Soient $x : U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} S \cap U' \subset \mathbb{R}^3$

et $y : V \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} S \cap V' \subset \mathbb{R}^3$

deux systèmes de coordonnées tels que

$W \overset{def}{:=} x(U) \cap y(V)$ est non vide.



$$W = S \cap U' \cap S \cap V'$$
$$= U' \cap S \cap V'$$
ouvert de $S \cap V'$

2ème donc $y^{-1}(W)$ ouvert de $\mathbb{R}^2$

Comme y cont, $y^{-1}(U') = y^{-1}(U' \cap S \cap V') = y^{-1}(W)$ ouvert de $\mathbb{R}^2$

Alors le changement de coordonnées

$$h = x^{-1}/_W \circ y/_{y^{-1}(W)} ; \ y^{-1}(W) \longrightarrow x^{-1}(W)$$

est un difféomorphisme de classe C^r sur l'ouvert $y^{-1}(W)$

Preuve de Do Carmo. La preuve des autres livres utilisent la définition de sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ (localement on peut redresser des petits morceaux de V de façon à former des ouverts de $\mathbb{R}^d$).

Par définition, U et V ouverts de $\mathbb{R}^2$,

U' et V' ouverts de $\mathbb{R}^3$,

x homéo de U sur $x(U) = S \cap U'$,

y homéo de V sur $y(V) = S \cap V'$. Donc par restriction

$$x/_{x^{-1}(W)} : x^{-1}(W) \xrightarrow{\simeq} W$$

sont des homéomorphismes

$$y/_{y^{-1}(W)} : y^{-1}(W) \xrightarrow{\simeq} W$$

Donc h composé d'homéomorphismes est un homéomorphisme.

Il n'est pas possible de conclure par un argument analogue que h est de classe C^r car x^{-1} est défini sur $S \cap U'$ un ouvert de S et on ne sait pas encore ce que veut dire de classe C^r sur un ouvert de S.

Nous allons procéder de la manière suivante

Soit $r \in y^{-1}(W)$ et soit $q = h(r)$

Soit $\underline{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ les applications coordonnées de $\underline{x}$

Corollaire Berger-Gostiaux 2.2.10.1 Theoremes

Les sous varietes de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ de classe C^r
muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^3$
sont des varietes differentielles de classe C^r de dim 2.

Corollaire et définition

Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

Soit $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction.

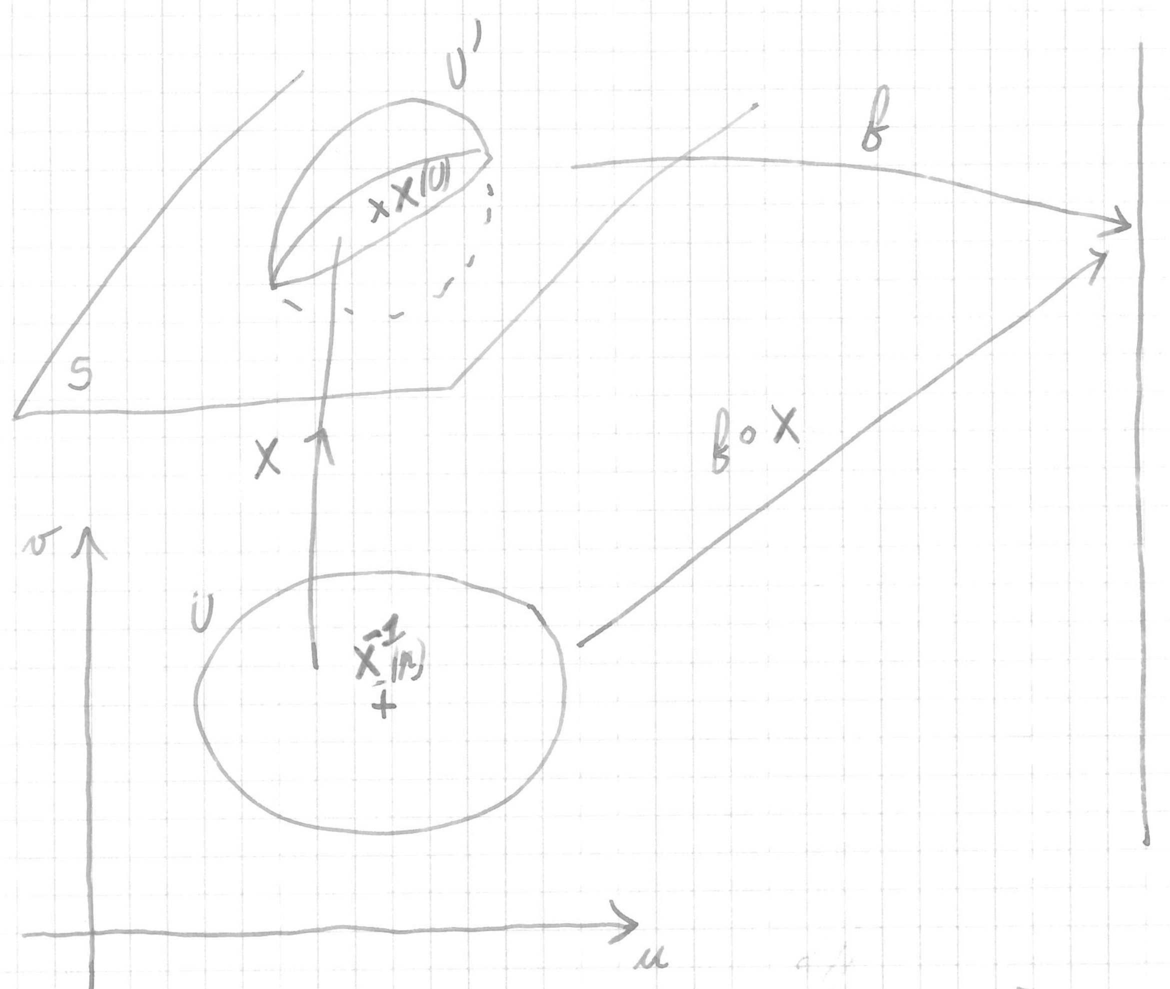
Soit $p \in S$.

Soit X un système de coordonnées de S sur un ouvert $S \cap V'$ de S contenant p

on dit que f est de classe C^r près de p

si le composé $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $(u,v) \longmapsto f\circ X(u,v)$ est de classe C^r près de $X^{-1}(p)$

définition indépendante du système de coordonnées X choisi



définition On dit que f est de classe C^r sur S

si f est de classe C^r près de chaque point $p \in S$

Proposition f de classe C^r sur $S \iff$ pour tout système de coordonnées

fin cours Vendredi 25 Mars 2011

$X : U \longrightarrow S$, $f \circ X$ est de classe C^r sur U