

Surfaces paramétrées

I

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dim 3

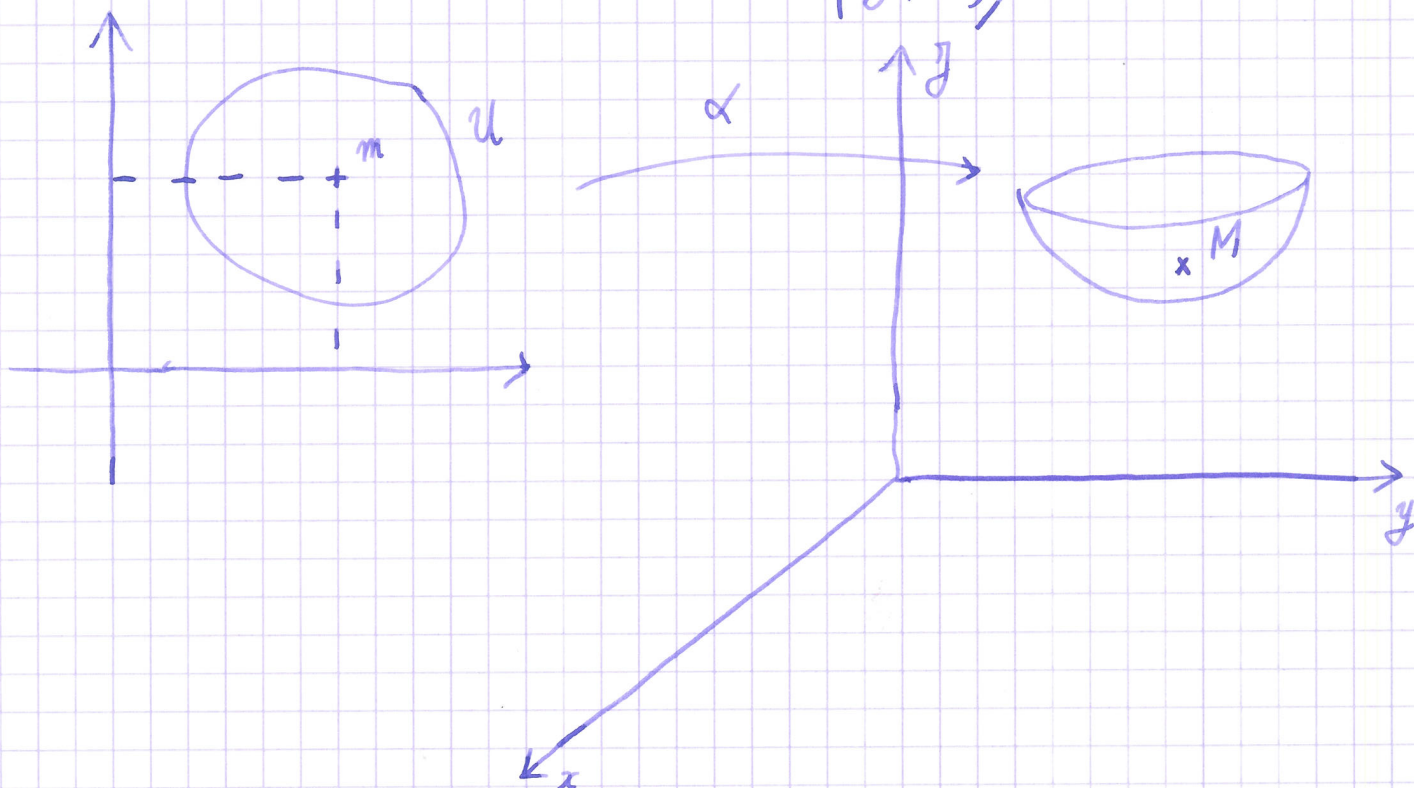
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$

definition Une surface paramétrée ou nappe paramétrée de classe C^r est une application de classe C^r de V dans $\mathcal{E}$

$$\alpha: V \longrightarrow \mathcal{E} \cong \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto M(u, v) \text{ de coordonnées } \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$



$\alpha(U)$ est le support (géométrique) de la surface paramétrisée

def Soit $\alpha: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrisée de classe C^2 . Soit $j: I \longrightarrow U$ une courbe paramétrisée de classe C^2 de support contenu dans U alors $\alpha \circ j: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définit une courbe

$$t \longmapsto \alpha(u(t), v(t))$$

paramétrisée de classe C^2 dont le support est contenu dans le support de α . On dit que $\alpha \circ j$ est un arc paramétrisé tracé sur la surface α

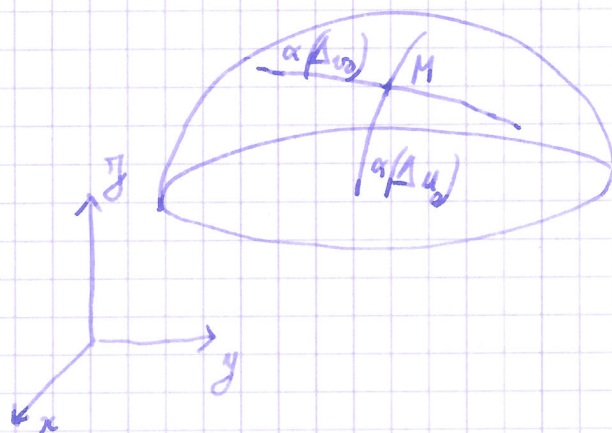
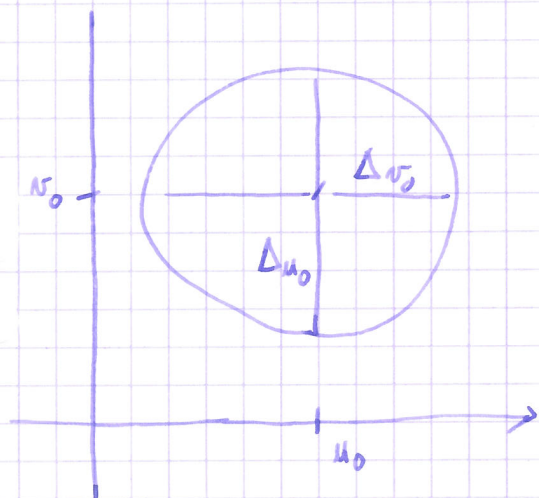
exemple Soit $j: \Delta_{v_0} \longrightarrow U$ $u \longmapsto (u, v_0)$ Δ_{v_0} est un ouvert de $\mathbb{R}$ pas forcément un intervalle

$$\Delta_{v_0} = \{t \in \mathbb{R} \text{ tq } (t, v_0) \in U\}$$

alors $\alpha \circ j: \Delta_{v_0} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $u \longmapsto \alpha(u, v_0)$ est un arc paramétrisé tracé sur la surface α appelé courbe coordonnée

De même pour $\Delta_{u_0} = \{t \in \mathbb{R} \text{ tq } (u_0, t) \in U\}$

$\alpha \circ j: \Delta_{u_0} \longrightarrow U$ $v \longmapsto \alpha(u_0, v)$



Changement de variables

Rappel sur les difféomorphismes

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\varphi: V \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(u_1, v_1) \longmapsto (u, v) = \varphi(u_1, v_1)$$

une application ~~injective~~ de classe C^∞ tel que

$\forall (u_1, v_1) \in V$, $D\varphi_{(u_1, v_1)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme

Comme $D\varphi_{(u_1, v_1)} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} dv_1$

mat $D\varphi_{u_1, v_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_1} & \frac{\partial u}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v}{\partial u_1} & \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{pmatrix}$ est de déterminant non nulle

D'après le théorème d'inversion locale, φ est une application ouverte en particulier $\varphi(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ donc si φ est injectif alors φ induit un difféomorphisme de classe C^∞ de V sur $\varphi(V)$.

Ramis - Deschamps - Odoux tome 3, 3.5.5 3° Corollaire

Changement de coordonnées

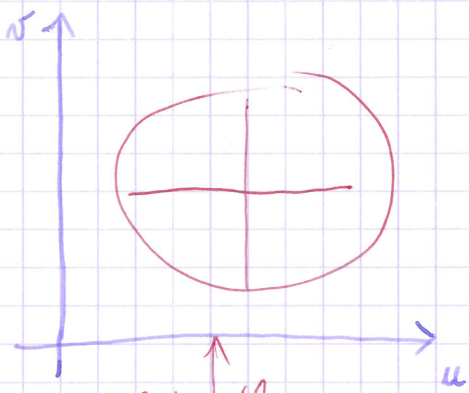
Soient V et U deux ouverts de $\mathbb{R}^2$

Soit $\varphi: V \longrightarrow U$ un difféomorphisme de classe C^∞ de V sur U

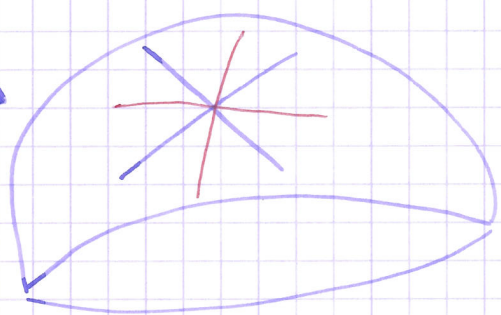
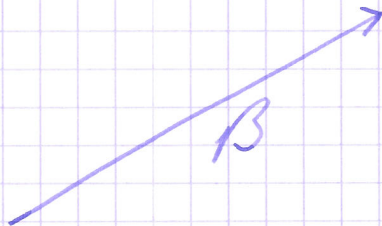
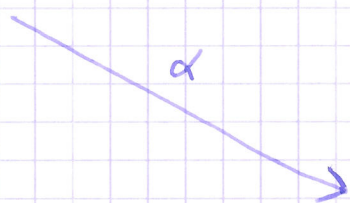
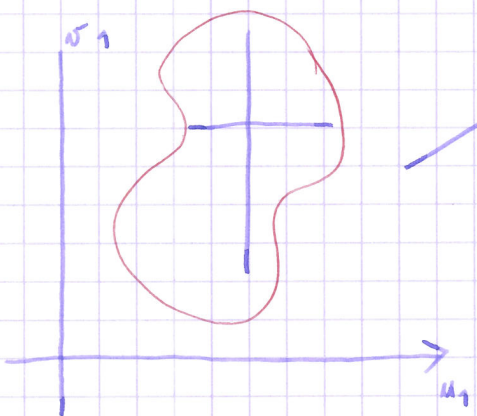
Soit $\alpha: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée de classe C^∞

alors $\beta = \alpha \circ \varphi: V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est aussi une surface paramétrée de classe C^∞ qui a le même support géométrique

$$\alpha(U) = \beta(V) \text{ que } \alpha$$



ψ $\uparrow$ S_{II}



II plan tangent en un point régulier

Soit $\alpha: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrisée de classe C^1

Soit $M_0 = \alpha(u_0, v_0)$

def Do Carmo p. 78

Le point M_0 est régulier si $D\alpha_{(u_0, v_0)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est

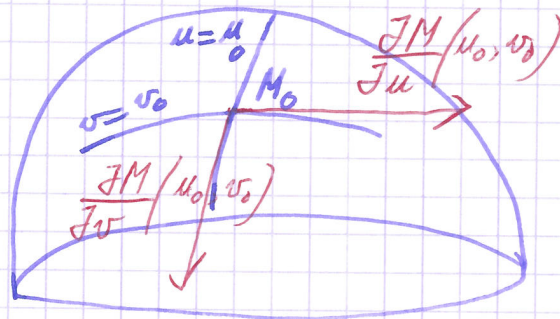
injective c à d si $\left(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$ est de

rang 2

c à d si $\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0)$

et $\frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)$ sont

indépendants



Le point M_0 est dit régulier ou stationnaire dans le cas contraire.

⑥

définition Si M_0 est un point régulier de la surface paramétrée,

l'ensemble des vecteurs tangents à α en M_0 est

$$T_{M_0} : D\alpha_{(u_0, v_0)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

c.à.d. le plan vectoriel engendré par les 2 vecteurs linéairement indépendants $\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)$

définition Si M_0 est un point régulier, le plan passant par

M_0 de direction vect $\left(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$

est appelé le plan tangent en M_0 à la surface paramétrée α

(7)

Proposition Si un point M_0 d'une surface paramétrée α est régulier alors il est encore régulier pour toutes les surfaces paramétrées obtenues par changement de coordonnées.

Le plan tangent en un point régulier à une surface paramétrée est invariant par changement de variables

Preuve Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Soit $\alpha: V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée

Soit $\varphi: V \longrightarrow V$ un difféomorphisme de classe C^1

Soit $\beta = \alpha \circ \varphi$

Soit $M_0 = \alpha(u_0, v_0)$

$$D(\beta)_{\varphi^{-1}(u_0, v_0)} = D(\alpha)_{(u_0, v_0)} \circ D\varphi_{\varphi^{-1}(u_0, v_0)}$$

Comme φ est un difféomorphisme alors $D\varphi_{\varphi^{-1}(u_0, v_0)}$ est un isomorphisme,

donc $D(\beta)_{\varphi^{-1}(u_0, v_0)}$ est injectif car $D(\alpha)_{(u_0, v_0)}$ est injectif

c à d M_0 est régulier pour α car M_0 est régulier pour β

$$\text{donc } \text{Im } D(\beta)_{\varphi^{-1}(u_0, v_0)} = \text{Im } D(\alpha)_{u_0, v_0}$$

donc le plan tangent en M_0 à β est égale au plan tangent en M_0 à α . □

Soit $\alpha: V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée

$$(u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

Soit $M_0 = \alpha(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ un point régulier

(8)

$\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)$ est un vecteur normal au plan tangent

équation du plan tangent

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\vec{M_0 M} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$

$$M \in \text{plan tangent} \Leftrightarrow \vec{M_0 M} \perp \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}$$

$$\Leftrightarrow \det \left(\vec{M_0 M}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \right) = \vec{M_0 M} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{M_0 M} \in \text{vect} \left(\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y - y_0 & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ z - z_0 & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Remarque: $\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)$ dépend de la paramétrisation

Soit $\varphi : V \longrightarrow U$ un difféomorphisme de classe C^2
 $(u_1, v_1) \longmapsto (u, v)$

$$\frac{\partial M}{\partial u_1} = \frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u_1} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u_1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial v_1} = \frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v_1} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v_1}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial v_1} &= \frac{\partial u}{\partial u_1} \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial v}{\partial v_1} \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial u_1} \frac{\partial M}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v_1} \frac{\partial M}{\partial u} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial u_1} \frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial v}{\partial u_1} \frac{\partial u}{\partial v_1} \right) \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_1} & \frac{\partial u}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v}{\partial u_1} & \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{vmatrix} \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \end{aligned}$$

Leborg - Fournard - Armanducci p. 481

orientation d'après Jean-Claude incomplet

$$= \text{Jacobian de } \varphi \text{ en } (u_1, v_1)$$

fin cours n°1 Lundi 13 Février 2012

fin cours Lundi 14 Mars 2011

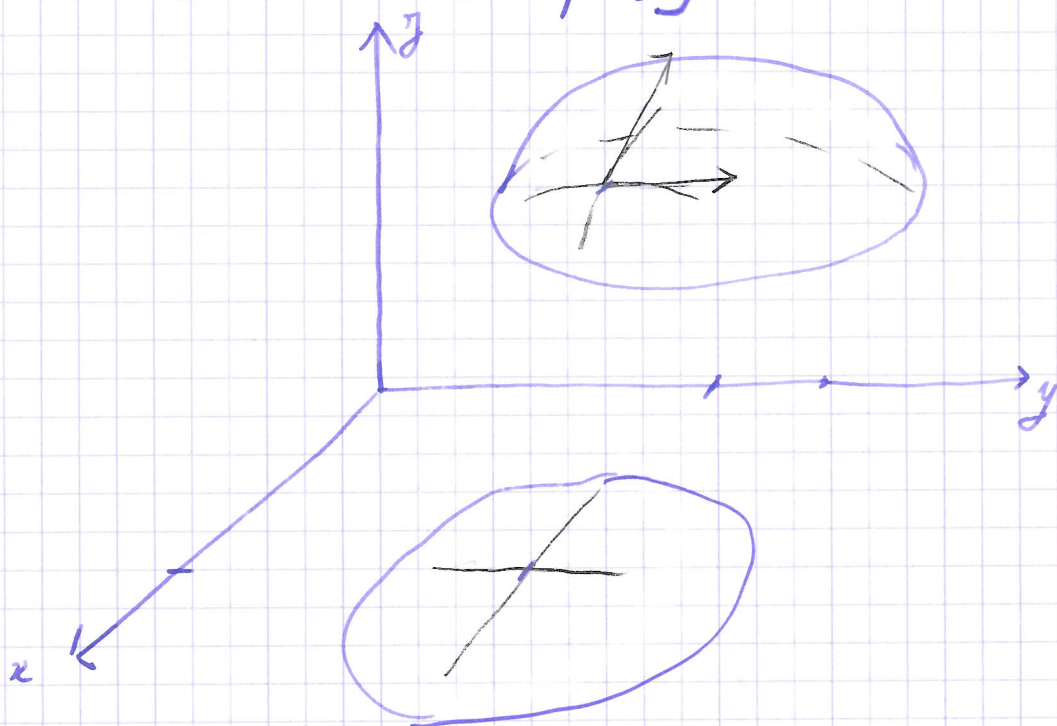
III cas particulier des surfaces d'équation $z = f(x, y)$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2

$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

Soit $S \stackrel{\text{def}}{=} \text{graphe de } f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } z = f(x, y) \}$



alors S est une surface paramétrisable

$$\alpha : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \longmapsto (x, y, f(x, y))$$

vecteurs du plan tangent $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}$ $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$

sont linéairement indépendants

vecteur normal $\frac{\partial \alpha}{\partial x} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$

équation du plan tangent

$$\vec{M_0 M} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial x} \wedge \frac{\partial M}{\partial y} \right) = (x - x_0) \frac{\partial b}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial b}{\partial y} + z - b(x_0, y_0) = 0$$

$$z = b(x_0, y_0) + \frac{\partial b}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial b}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Position relative de la surface par rapport à son plan tangent

$$\text{Soit } \Delta(x, y) = b(x, y) - b(x_0, y_0) - \frac{\partial b}{\partial x}(x - x_0) - \frac{\partial b}{\partial y}(y - y_0)$$

(x_0, y_0) est un point critique de Δ

on regarde si (x_0, y_0) est un extremum (relatif) ou non de Δ .